BHS II K27

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke
Aktiengesellschaft
Bibliothek:
Gruppe: II M
E Nr. 24

Ueberzeugende Gründe
der
Rechenkunst
insbesondere
der Reesischen Methode
und
der Decimal-Rechnung

Mit vielen practischen Anwendungen

von

C. L. Schübler.

Heilbronn am Neckar u. Rotenburg ob der Tauber

bei Johann Daniel Claß.

1795.

BIBLIOTHEK
DER K.B.GENERAL
BERGW.U.SALINEN
ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Die meisten Vorreden, welche Anleitungen zur Rechenkunst vorangeschikt zu werden pflegen, enthalten Entschuldigungen des kühnen Autors, der es wagen mochte, die schon vorhandne grosse Anzahl solcher Anleitungen zu vermehren. Ich umgehe es, dergleichen Rechtfertigungen auch hier wieder abdrucken zu lassen, da mein Werk selbst ganz gewiß um gar nichts besser oder annehmlicher erscheinen wird, wenn ich seine Ausfendung ins Publicum, auch mit den bündigsten Entschuldigungs-Gründen begleiten möchte. Indessen halte ich doch für räthlich, folgende kur-

ze Bemerkungen meiner Schrift hier voranzuschicken.

Bücher, welche mechanische Rechner zu bilden bestimmt sind, haben wir im Ueberfluß. Beinahe in jedem Lesebuch für Schulen stehen Vorschriften, wie man die Zahlen über- und untereinander setzen und vergleichen müsse, um den und jenen Erfolg in Addition, in Division und bei Aufgaben aller Art zu erhalten.

Bücher aber, welche die Gründe prüfen, auf denen der vorgeschriebene Zahlenmechanismus ruhet, und die Ursachen der Erscheinungen, nach deren Daseyn der angehende Rechner das Recht hat, zu fragen, deutlich auseinandersetzen und in gutem Zusammenhang erläutern, — solche Bücher sind in der That in noch gar nicht grosser Anzahl vorhanden.

Folgende Erwägung tritt hiebei noch insbesondre hinzu: Die vorgerükte Cultur der

Arith-

Arithmetik und andrer zunächst mit ihr verwandten Wissenschaften macht es einmal zum Bedürfnis unsrer Tage, daß in einem Lehrbuch der Rechenkunst, ausser gemeiner Dreyjenlehre nach alter Weise, auch

die Lehre von allgemeinen Grössen-Bezeichnungen, nebst der des Decimal-Calküls

vorgetragen werde. Den Nutzen und die Nothwendigkeit solcher Vorträge hier zu deduciren, verstattet der Raum dieser gegenwärtigen Blätter bei weitem nicht. Genug, daß man zuverläßig beinahe kein einziges modernes Buch über geometrische Sätze, über einzelne Theile der Physik, der Mechanik, der Wasserkünste, der Optik, der Perspectiv, selbst der Oekonomie, (wo nur Messungen vorkommen,) lesen kann, ohne die Kenntnisse der allgemeinen arithmetischen Zeichenlehre, und der Decimalrechnung mitgebracht zu haben.

Die Ueberzeugung hievon hat mich bewogen, den Lehren über die sogenannte fünf

ede S. V. VI. und S. XI. XII. wohl zu merken,
uschalten.

Speeiss sogleich die Principien der Buchstabenrechnung an schiklichen Stellen einzuweben; ich bin aber dabei mit scheuer Hand zu Werk gegangen, und habe aufs sorgfältigste alles, was die Ueberladung abschrecken möchte, zu vermeiden getrachtet. Das Vorurtheil,

„als ob jede allgemeine Bezeichnung mit
„a und x auf tiefsinnige Algebra hinein-
„führe, und schon dazu gehöre!"

herrscht noch allzu allgemein, bei Gelehrten und Ungelehrten, als daß es doch nicht öfters der Klugheit gemäs seyn sollte, darauf — mit Maaße — Rükssicht zu nehmen. Immer konnte ich freilich demselben nicht nachgeben, und hie und da schien es mir, als ob ich eine wissentliche Versündigung gegen die Würde der Wahrheit begehen würde, wenn ich durch Befürchtungen, einzelnen Rechnern vom alten Schlag zu misfallen, mich weiter leiten, und abhalten liesse, nöthige Sätze in ihrer gehörigen Allgemeinheit zu deduciren. Selbst in

der

der Lehre von der Regel de Tri und von dem Reesischen Kettensaz habe ich daher (in §. 55 — §. 58. und in §. 77.) etlichemal allgemeine Zeichen gebraucht, und bereue dieses Benehmen noch nicht, glaube auch, dadurch auf keine Weise mich in entbehrliche Spizfindigkeiten eingelassen zu haben. Wer andern Sinnes ist, und mich belehren möchte, daß sich die allgemeine Zeichen bei den angeführten Beweisen wohl hätten entbehren, und daß sich die leztere ohne jener Anwendung eben so evident und bündig hätten führen lassen, der würde mich durch Mittheilung seiner Kunstgabe allerdings gar sehr verbinden, und wahrscheinlich, wenn er dieselbe ganz ins freie Publicum aussenden wollte, recht viele Männer, die (so viel ich weiß) meines Glaubens sind, in gleiche Verbindlichkeit versetzen. —

Die Vorurtheile gegen die weitere Einführung der

Decimal-Rechnung

sind nicht weniger allgemein. Und doch gehört es unter die streng-ausgemachten Wahrheiten, daß

wer die Rechenkunst durchaus ohne Decimal-Rechnung erlernt, schlechterdings nur die halbe Arithmetik erlerne.

Diese halbe Arithmetik führt oft auf sehr einseitige Schlüsse, und macht die richtige Uebersicht des ganzen Zahlen-Gebäudes, (dessen Natur doch jeder Calculator im wesentlichen kennen muß) unmöglich.

Wer nichts von Decimalen versteht, läugnet freilich diese Wahrheit; aber ich habe noch niemand gekannt, der die dahin gehörige Vorurtheile nicht abgelegt hätte, so bald er sich nur die Zeit nicht verdriessen lassen mochte, die Gründe des Decimal-Calküls zu fassen, und denselben ein paar Tage hindurch in Ausübung zu bringen. Der Unbefangene hat gewiß nicht den Zeit-Aufwand einer Woche nöthig, um zu den Ueberzeugungen der auf-

seror-

ferordentlichen Vortheile zu gelangen, welche diese Rechnungs-Methode gewährt, welche auch die durchgängige Einführung derselben in hohen und niedern Schulen in kurzem (wenn nicht alles trügt) nothwendig machen wird.

Wir besitzen in Deutschland zuverläßig bereits einzelne gute Bücher, aus welchen man die allgemeine Zeichenlehre sowohl, als die Decimal-Methode erlernen kann. Aber, wenn man einzelne Compendien, welche eigentlich für Gelehrte oder für akademische Vorlesungen bestimmt sind, abrechnet, so ist die Anzahl solcher Schriften (so viel ich mich umgesehen habe) doch in der That noch sehr klein. Wenigstens fehlen in den allermeisten, welche ich durchblättert habe, gewisse Ausführungen und Erläuterungen, deren Mittheilung und Zusammenstellung mit den Lehren der alten Arithmetiker mir immer schlechterdings nothwendig geschienen haben, um die bezielte Cultur der Arithmetik nach

Wunsch zu befördern, und den Zwang der verwerflichen Rechnungsweisen, die ohne Rechtfertigung erlernt werden, zu verdrängen.

Ueberdem haben mich viele Erfahrungen zu dem festen Glauben verleitet, daß man aus einem einzigen Lehrbuch der Arithmetik, wenn es auch noch so geschikt verfaßt wäre, nimmermehr nur halbvollständige Einsichten der Rechenkunst sich erwerben könne, sondern daß blos das Studium in mehrern Schriften, welche gewisse Hauptlehren, von verschiedenen Verfassern mit verschiedenen Wendungen vorgetragen, enthalten, nach und nach zu der Bildung führe, welche jedem jungen Mann, der Arithmetik gründlich und in gehöriger Uebersicht zu erlernen sich vorsezt, die gewünschte Befriedigung gewähren kann.

Ich bin weit entfernt, der Ungeduld junger Leute, welche gern in zehn Büchern zugleich

gleich herum hüpfen, hiemit das Wort zu reden, bin auch sehr gewiß, daß jeder angehende Rechner sich, bei ernstlichem Selbststudium der Arithmetik, nur ein Lehrbuch, an das er sich vor allen andern zu halten hat, wählen müsse. Allein die Beiziehung und Vergleichung etlicher nach guten Grundsätzen geschriebener Unterrichtbücher, welche mit seinem Hauptbuche nahe verwandt sind, halte ich dennoch jedem Jüngling, der kein sclavischer Rechner werden will, und der den gemeinen Mechanismus der Zahlen schon kennt, etwas mehr aber, als diesen allein, kennen zu lernen, verlangt, für sehr vorträglich. — —

Am Schluß dieser Vorrede erachte ich es nicht für überflüssig, doch noch auf ein paar Seiten einige Vorträge meines Buchs mit namentlicher Anführung bemerklich zu machen, welche ich vor andern dem Nachdenken angehen-

gehender Rechner empfehlen zu dürfen glaube.

1) Die Erinnerungen über die Nothwendigkeit, alles auf Gleichartigkeit zurükzuführen:

§. 8. §. 11. §. 42. §. 60. §. 135.

2) Die Zerlegung aller Grössen in Factoren, und die Bezeichnungsart dabei:

§. 26. §. 35. §. 37. §. 90.

3) Die Zerfällungen eines jeden Dividenden, um die Multipla des Divisors und Quotienten deutlich zu ersehen:

§. 30. §. 31.

4) Die Zurükführung aller Brüche, und aller Multiplications- und Divisions-Acte auf geometrische Proportionen:

§. 51. §. 52. §. 53.

5) Die Hinleitung auf die Evidenz des Regel de Tri-Satzes durch ausgesezte Dar-

Darstellung des Exponenten, als eines Factors:

§. 54. bis §. 60.

6) Die Zurechtweisungen bei Behandlung umgekehrter Verhältnisse:

§. 71. §. 73.

7) Die Zusammenziehung zweier connexen Proportionen, und die natürliche Fortführung bis zu dem Reesischen Kettensaz, (bis vor denselben gleichsam hin):

§. 80. §. 81.

8) Die Bemerkung des wesentlichen Unterschieds zweier Gattungen von Aufgaben, welche doch beede durch die Regel de Quinque aufgelöst werden:

§. 82. §. 83.

9) Die Anzeige des doppelten Verfahrens, mittelst welches alle Probleme, welche

die

die umgekehrte Regel de Quinque angehen, sich (gleichsam auf zwei Seiten) angreiffen und auflösen lassen:

§. 88. §. 89.

10) Die natürliche Benützung der allgemeinen Zeichen, um alle Aufgaben, welche arithmetische Progressionen angehen, kurz aufzulösen:

§. 105 — §. 110.

11) Die Durchzählung der Geltungen von Brüchen, welche mit andern Zahlen auch Decimalen enthalten:

§. 138. §. 139.

Mehrere Stellen zeichne ich nicht aus. Auch die hiemit bemerkten enthalten keine neue nirgends erfindliche, oder noch nirgends gegebene Belehrungen. *) In einem Lehrbuch

*) Die Darstellungen in §. 80. §. 81. habe ich doch aus keinem Buch mit Wissen entlehnt; und

buch der Arithmetik, welches einen Zwek, wie das vorliegende hat, lassen sich gar nicht aufferordentliche Aufschlüsse, welche gelehrten Mathematikern durch Neuheit auffallen könnten, erwarten.

Blos einzelne nicht gar gewöhnliche Wendungen in gewissen Beweisen, einzelne Herbeiführungen und Einschiebungen schicklicher Mittel-Sätze, um wichtige Hauptsätze zur Evidenz zu bringen, einzelne Heraushebungen gewisser meistens übersehener Momente, auch gewisser Darstellungen, welche zur modernen Bildung der Arithmetik einmal gehören, und selbst im Studium andrer Wissenschaften brauchbar bleiben, . . . können in unsrer Zeit, der Billigkeit nach, von einem Schriftsteller in diesem Fach (wie mich dünkt)

und die Bemerkungen in §. 82 — 89. habe ich noch weniger in einer Schrift finden können. Sie werden aber ohne Zweifel hie und da wohl anzutreffen seyn.

dünkt) in Anspruch genommen werden. Aber eben in diesen Hinsichten ist und bleibt gewiß noch immer ein grosses Feld offen, in welchem sich sichre Verdienste, die doch noch einiges Danks werth seyn möchten, jezt und in Zukunft erwerben lassen.

C. L. Schübler.

Innhalt
des ganzen Werks.

I. Abschnitt.
Vom Zählen, insbesondre vom sogenannten Numeriren.

§. 1. Ueber den Begriff von Zahl; sodann vom Zählen-lernen.

§. 2. Darstellung der einfachen und der zusammengesezten Zahlzeichen; vorzüglich über die Dekaden bis Hundert.

§. 3. Ueber die genaue Verbindung der Numeration und Addition.

§. 4. Ueber die Bezifrung von Hundert bis Tausend.

§. 5. Ueber die Bezifrung von Zahlen, die über Tausend steigen, bis zur Trillion.

§. 6. Ueber die angebrachte Strichlein unterhalb der Zifern beim Numeriren. Vorzug der Bezeichnuug oberhalb der leztern.

II. Abschnitt.
Vom Addiren ganzer Zahlen.

§. 7. Was Summe und Addiren sei.

§. 8. Wie angehende Rechner sich zu benehmen haben, wenn die einzelne Summe der senkrechten Reihe über zehn steigt.

Be-

Betrachtungen über das Gesez; alles auf Gleichartigkeit zurük zu führen.

§. 9. Vom Behalten, bei Uebertragung der Zahlen von einer senkrechten Reihe in die nächstvorhergehende.

§. 10. Von einzelnen Vortheilen beim Addiren, wenn lange Columnen vorkommen.

Auch etwas über anzustellende Proben, nach vorgenommenen Additionen.

§. 11. Ueber Addition mit benannten Zahlen... Von der Anstrengung dabei, im Kopf zu rechnen.

§. 12. Ueber Reduction auf Gleichartigkeit, und zusammengesezte Einheit.

§. 13. Ueber das Hauptzeichen der Addition mit +; und der unnöthigen Furcht für dergleichen Zeichen.

III. Abschnitt.

Vom Subtrahiren bei ganzen Zahlen.

§. 14. Erklärung der Kunstwörter bei der Subtraction. Form der Stellung für die Zahlen dabei.

§. 15. Benehmen, wenn Zifern in einzelnen Stellen von kleinern Zifern, die über diesen Stellen stehen, abzuziehen, aufgegeben wird. Beweis des mechanischen Verfahrens.

§. 16. Ueber den Ausdruk Differenz, und die Wichtigkeit der Vorstellung davon, um die Ursache der Proben bei Subtraction einzusehen.

§. 17. Angabe des Haupt-Zeichens für Subtraction; und dessen Benüzung, um das Verfahren der Probe zu beleuchten.

§. 18.

§. 18. Folgerung, auch wenn für die Zahl des Subtrahenden eine allgemeine Signatur gesezt wird.

§. 19. Anzeige, was sich wohl hier noch weiter beibringen liesse, wenn nicht der Schein von Schwierigkeiten zu vermeiden wäre.

§. 20. Anweisung, wie man bei genannten Zahlen sich im Subtrahiren zu benehmen habe.

IV. Abschnitt.

Vom Multipliciren mit ganzen Zahlen.

§. 21. Erklärungen der Kunstwörter, die beim Multipliciren vorkommen.

§. 22. Erfindung von Tafeln zum mechanischen Rechnen.

§. 23. Ueber die Erzeugung dessen, was Product heißt. Darstellung in einem aus Punkten bestehenden Rechtek.

§. 24. Mechanismus beim wirklichen Multipliciren nach gewohnter Form, wenn der eine Factor nur eine Zahl unter 10 ist.

§. 25. Fortsetzung der Belehrung, wenn beede Factoren bis auf 10, oder über 10 gehen.

§. 26. Von den Hauptzeichen bei Multiplicationen, und deren Anwendung, wenn Summen oder wenn Differenzen einen Factor haben.

V. Abschnitt.

Vom Dividiren mit ganzen Zahlen.

§. 27. Erklärung der Kunstwörter, welche beim Dividiren vorkommen; nebst der Veranlassung zu deren Aufstellung.

§. 28. Nähere Entwiklung der Begriffe, welche aufs Dividiren führen, besonders in Hinsicht auf die Ergänzungen, wenn gewisse Zahlen keine vollkommene Multipla sind.

§. 29. Belehrung der gewöhnlicher Weise, wirklich zu dividiren, wenn der Divisor nur eine Zahl unter 10 ist.

§. 30. Fortsetzung der Belehrung, wenn der Divisor aus höhern Zahlen besteht.

§. 31. Ueber die wechselseitigen Proben der Multiplicationen und der Divisionen.

§. 32. Ueber Dividiren und Multipliciren mit benannten Zahlen.

§. 33. Von den zwei Hauptzeichen zu allgemeiner Vorstellung der Division.

VI. Abschnitt.

Von Brüchen, und den Rechnungsarten damit.

§. 34. Zerlegung der Einheit, um auf das zu kommen, was man Fragment, Bruch, heißt. Vom Nenner und Zähler besonders.

§. 35. Jeder Bruch läßt sich in 2 Factoren darstellen. Wichtigkeit dieser Vorstellung.

§. 36. Hinleitung, zu uneigentlichen oder unächten Brüchen.

§. 37. Betrachtungen über die unächten Brüche, aus welchen erst die Lehre von der Division sich vollkommen ergänzen läßt.

§. 38. Wie man die Factoren für die Zähler in unächten Brüchen finde.

Von großen Einmaleinsen; und Verzeichnissen der Primzahlen.

§. 39. Umbildung ganzer Zahlen zu Brüchen.

§. 40. Von Reduction oder Verkleinerung der Brüche aller Art; und den Vortheilen kleinerer Brüche.

§. 41. Von den 2 Wegen, die Hebung beschwerlicher Brüche zu erleichtern.

§. 42. Belehrung, ächte und unächte Brüche zu addiren. Beweis der Regel zum mechanischen Verfahren.

§. 43. Verhalten, wenn eine ganze Zahl und ein Bruch, auch mehr, als eine zu summiren sind.

§. 44. Belehrung, ächte und unächte Brüche von einander zu subtrahiren.

§. 45. Belehrung, Brüche mit einander zu multipliciren; nebst dem Beweis des Resultats (Erfolgs im Product).

§. 46. Nachtrag über den Fall, wenn der eine Bruch ein unächter, der andre ein ächter Bruch ist.

§. 47. Belehrung, Brüche mit einander zu dividiren, mit ächten und mit gemischten Brüchen. Auch über die Vorenthaltung des Beweises dabei.

VII. Abschnitt.

Von Verhältnissen und Proportionen.

§. 48. Belehrung, was man unter Verhältnis und Proportionen verstehe; insbesondre unter geometrischen Proportionen.

§. 49. Belehrung, was man im Gegentheil unter arithmetischen Verhältnissen und Proportionen verstehe.

§. 50. Von dem Daseyn geometrischer Verhältnisse in den einfachsten Rechnungsfällen; bei Multiplication; auch bei Divisionen mit ganzen Zahlen.

§. 51. Von deren Daseyn bei Multiplicationen mit 2 Brüchen, als Factoren.

§. 52. Von verstekten Proportionen in jedem Bruch. Beweis, wie sich aus jedem Bruch zwei wesentlich verschiedene Proportionen bilden lassen, welche ihn genau angehen.

§. 53. Von der Bildung geometrischer Proportionen, bei Divisionen mit Brüchen. Auch Beweis der mechanischen Vorschrift eben dabei. Nebst einer Anmerkung über die Reduction sogenannter doppelter Brüche.

§. 54. Der Hauptlehrsaz, daß in jeder Proportion das Product der äussern Glieder dem der mittlern gleich sei, wird bewiesen.

§. 55. Erläuterung, wie mit dem gegebenen Exponenten und einem Glied eines Verhältnisses allemal das zweite zugleich gegeben sei.

§. 56. Folgerung daraus, um die Aufgabe zu lösen:

„Aus den 3 bekannten vordern Gliedern, das lezte unbekannte zu finden.

Beweis über die Richtigkeit der Auflösung.

§. 57. Gründe der Vorschrift zu dem gemeinen mechanischen Verfahren, nach welchem eben diese Aufgabe aufgelöst wird.

§. 58. Zusätze zu der Lehre von Proportionen, über Umbildung von je zwei und zwei Gliedern, und Umwendung der Verhältnisse; auch über die Multiplication zweier Verhältnisse und Proportionen durcheinander.

VIII. Abschnitt.

Ueber die Anwendung der nächstvorhergehenden Lehren zu Ausübung der Regel de Tri.

§. 59. Angaben der alten Rechner, die Regel de Tri-Sätze zu stellen, mit Belehrung der bessern Methode.

§. 60.

§. 60. Beantwortung eines Einwurfs für die alte Stellung, in welcher ungleichartige Glieder zusammen gepaart werden.

§. 61. In wie ferne Fragen, welche bestimmte Theilungen zur Absicht haben, auf Proportionen zu bringen, und wie deren Glieder zu behandeln seien.

§. 62. Erläuterung des im vorigen §. gesezten Beispiels, durch Anzeige zweier andern Methoden, um zum Schluß-Glied zu gelangen.

§. 63. Prüfung der Vortheile des zweiten Wegs, wenn Kreuzer zu Guldenbrüchen umgebildet werden.

§. 64. Aufführung einer Reihe von Guldenbrüchen, welche sehr oft in praktischen Rechnungen vorkommen.

§. 65. Verwandlung von Thalern in Gulden, und umgekehrt, mit Anzeigen einiger Rechnungsabkürzungen.

§. 66. Reduction des Gelds vom 24 Guldenfuß in des vom 20 Guldenfuß. Auch über die Rechnung mit Sächsischen Thalern und Groschen.

§. 67. Reduction von Frankfurter-Wechselthalern auf Thaler nach dem 20 Guldenfuß.

§. 68. Reduction von Frankf. Wechsel-Gulden auf Gulden nach dem 24 Guldenfuß.

§. 69. Ueber Gewicht-Reductionen, und die Bildung der Rechnungs-Sätze dabei.

Beispiele von Nürnberger, Leipziger; Frankfurter Stuttgardter-Gewichten.

§. 70. Ueber zweierlei Gewicht-Zahlen, welchen gemeinschaftliche Factoren fehlen; mit entgegengesezten Beispielen.

Erwähnung der Gewichte von Hamburg, Berlin, Wien, Stuttgardt, Amsterdam, London, Frankfurt (am Mayn).

IX. Abschnitt.

Ueber die Umkehrung der Verhältnisse in Proportionen; oder über die verkehrte Regel de Tri.

§. 71. Allgemeine Betrachtungen über das, was man Umkehrung von Verhältnissen nennt.

§. 72. Angabe, wie Proportionen aufgestellt werden können, wenn in aufgeworfenen Fragen umgekehrte Verhältnisse vorkommen.

§. 73. Beleuchtung der drei vorgelegten Beispiele, und Rechtfertigung der formirten Proportionen.

§. 74. Bemerkung über das, was durch die verkehrte Regel de Tri eigentlich gelehrt wird; (keine neue oder besondre Rechnung) nebst Anzeige der Zweifel und Anstände, welche Anfänger öfters irren, wenn ihnen Fragen, die in diesen Abschnitt gehören, vorgelegt werden.

Nachtrag zu §. 73 und §. 74. in welchem die Anwendung auf Reductionen verschiedener Maase gezeigt wird.

X. Abschnitt.

Ueber die Zusammensetzung zweier connexen Proportionen, und der daraus abgeleiteten Reesischen Regel.

§. 75. Ueber Fragen, welche zu viel enthalten, als daß sie durch eine Proportion sich beantworten liessen. Darstellung zweier zusammenhängenden Proportionen, auf zweierlei Art.

§. 76. Nähere Beleuchtung des Vortheils, wenn alle Ausrechnung selbst bis in das lezte Glied der zweiten Proportion verschoben wird.

§. 77. Noch grösserer Abkürzungs-Vorteil, wenn man das lezte Glied der 1sten Proportion nur mit einem Punkt bezeichnet; Hinleitung eben damit auf die Regel Quinque der Alten.

§. 78.

§. 78. Beseitigung eines Einwurfs, welchen Anfänger wohl über den Vortrag der vorhergeh. Blätter von §. 75 an machen können.

§. 79. Aufstellung von drei Beispielen, um die Kürze der Arbeit mit fünf Gliedern der vorgegebenen Verhältnisse noch deutlicher zu zeigen.

§. 80. Schluß aus dem obigen, eine allgemeine Gesezlichkeit nun kündig aussprechen zu können, in Ansehung eines Dividenden, der aus drei Hauptfactoren besteht, und eines Divisors, der zwei enthält.

§. 81. Hinleitung auf die Reesische Darstellungs-Weise der Proportions-Glieder in Columnen mit Bemerkungen, über das Vorurtheil, welches diese Weise als eine besondre Erfindung ehrt.

§. 82. Allgemeine Bemerkung über die Natur und innre Beschaffenheit der Probleme, welche durch die Regel de Quinque aufgelöst werden.

§. 83. Ausführung von Rechnungs-Sätzen, bei vorgelegten Aufgaben, welche Proportionen von andrer Zusammenordnung der Glieder veranlassen, als die von §. 75 bis §. 81. waren.

§. 84. Belehrung über Aufgaben, welche auf umgekehrte Verhältnisse führen, und zwei Proportionen veranlassen; sodann über Abkürzung durch die umgekehrte Regel de Quinque.

§. 85. Weitere Ausführung durch Beispiele mit Erläuterungen.

§. 86. §. 87. Fortsetzung.

§. 88. Belehrung, wie jedes Problem, welches durch die umgekehrte Regel de Quinque sich auflösen läßt, von zwei verschiedenen Seiten (gleichsam) angegriffen werden könne.

§. 89. Fortsetzung, um die Behauptung des vorhergeh. §. vollständig zu beweisen.

XI. Abschnitt.

Von Zusammenordnung dreier (auch mehr connexer) Proportionen, und Anwendung der Reesischen Regel dabei.

§. 90. Gründe, auf welchen die Zusammenziehung dreier Proportionen in eine einzige beruht; und Schiklichkeit großer Abkürzung der Verhältnis-Zahlen bei gemeinschaftlichen Factoren.

§. 91. Zusammenstellung von 3 Proportionen, in welchen die Stellen der identischen Glieder, der Anwendung wegen, besonders zu merken sind.

§. 92. Erläuterung durch ein Beispiel, in welchem die Erfordernis von rauher Frucht (Dinkel) zu einem gewissen Quantum Brod bestimmt wird.

§. 93. Ausführung desselben Problems, nach dem Reesischen Ketten-Saz; mit Bemerkungen über die für den leztern ersonnene Special-Regeln.

§. 94. Erläuterung durch ein IItes Beispiel, in welchem der Gewinn bei dem Detail-Verkauf einer Waare, deren Einkauf in gröserm Quantum angegeben ist, nach Procenten bestimmt wird.

Ausführung nach Proportionen, und auch nach dem Reesischen Saz.

§. 95. Erläuterung durch ein IIItes und IVtes Beispiel, über Wein-Einkäuffe und Verkäuffe; und die Berechnung des Gewinns.

§. 96. Erläuterung durch ein Vtes und VItes Beispiel, von kaufmännischen Geld-Wechseln hergenommen. Von Bestimmungen des Gehalts verschiedener Sorten gegeneinander; mit Erinnerungen über den Sinn kurzer kaufmännischer Ausdrücke.

§. 97. Belehrung über Aufgaben, welche vier connectirte Proportionen erfordern.

Vergl. Amsterd. und Augsb. Wechsel-Gelds.

§. 98. Fortsetzung, durch Beispiele, wo der Vortheil des Wechsels bei der Wahl von verschiedenen Plätzen zu berechnen verlangt wird.

Auch etwas über die sogenannte Differenz der Procente.

§. 99. Noch ein Beispiel, von einer Wollen-Verkaufrechnung hergenommen, wozu ein Abschlag der Geldwährung gekommen.

Mit Bemerkungen über die Zerlegung zusammengesezter Probleme.

XII. Abschnitt.

Von stetigen oder zusammenhängenden arithmetischen Proportionen und Progressionen.

§. 100. Unterschied zwischen stetigen und nicht stetigen arithmetischen Proportionen.

§. 101. Beweis, daß in jeder arithm. Proportion die Summe der äussern Glieder der der mittlern gleich sei; mit Anzeige der allgemeinen Formel, welche jede solche Proportion darstellt.

§. 102. Lehre von arithmetischen Mittelproportionalen mit Anzeige ihrer allgemeinen Darstellung, und Bemerkungen über ihren grosen Gebrauch.

§. 103. Ueber die Vorstellung des 3ten Glieds jeder arithmet. Proportion; und die Folge der natürlichen Zahlen insbesondre.

§. 104. Von arithmetischen Progressionen. Allgemeine Formel, die für jedes (einzeln) herausgenommene Glied paßt.

§. 105. Nutzen der allgemeinen Vorstellung, um schnell die Gröse jedes einzelnen Glieds, nach welchem gefragt wird, angeben zu können.

§. 106. Weitere Erläuterung dieses Nutzens, wenn nach der Differenz, oder nach der Anzahl der

der Glieder in vorgegebenen Reihen gefragt wird.

§. 107. Belehrung, wie man vorgegebene allgemeine Formeln umkehre.

§. 108. Auflösung des Problems: die Summe einer arithmetischen Reihe anzugeben, ohne daß die Kenntnis oder Berechnung der mittlern Glieder nur nöthig wäre.

§. 109. Erläuterung durch drei Beispiele, mit besondern Anmerkungen über das lezte, wo mehr als nur eine unbekannte Gröse verstekt zu liegen scheint.

§. 110. Nutzen einer leichten Umbildung der Hauptformel, welche die Summe arithm. Reihen darstellt. Mittel, Zahlen in kleinere zu zerlegen.

XIII. Abschnitt.

Von stetigen oder zusammenhängenden geometrischen Proportionen und Progressionen.

§. 111. Von der Gestalt und Bildung stetiger Proportionen. Deren allgemeine Darstellung, mit Rükficht auf §. 54.

§. 112. Das Product der 2 mittlern Glieder in diesen Proportionen wird allemal einem Quadrat gleich geachtet. Betrachtungen über die Wurzel eines jeden Quadrats; und über Aequivalente derselben, und Grösen, welche am nächsten daran hinreichen.

§. 113. Wie die geometrische Mittelproportionale zu finden, und anzugeben sei, auch wenn keine vollkommene Wurzelausziehung möglich ist.

§. 114. Belehrung über Irrationalen oder incommensurable Grösen, welche allemal als geom. Mittelproportionalen anzusehen sind.

§. 115. Folgerung auf stetige geometrische Proportionen, deren 1stes Glied 1 heißt. Hinleitung damit auf geometrische Progressionen.

§. 116. Betrachtungen über das 4te Glied jeder geometrischen Reihe, über dessen Gestalt und Erzeugung.

§. 117. Erzeugung des 5ten, des 6ten Gliedes, und aller folgenden nach einer fortgehenden sichern Gesezlichkeit; aus welcher die Auflösung des Problems folgt: Jedes einzelne Glied schnell darzustellen, wenn blos das 1ste und 2te der Reihe gegeben sind.

§. 118. Weitere Beleuchtungeu über die Natur geometrischen Reihen, nebst Auflösung des Problems: Die Summe jeder geometr. Progression aus dem ersten und lezten Glied nebst den Exponenten, zu bestimmen.

§. 119. Beweis der dabei aufgestellten Formel.

XIV. Abschnitt.

Von der Decimal-Rechnung.

§. 120. Aeußre Form der Decimalbrüche. Gegeneinanderstellung derselben, und gewöhnlicher Brüche in vielen Beispielen.

§. 121. Gründe der Decimal-Ausdrücke; und Beleuchtung der allgemeinen Gesezlichkeit, nach der sie dargestellt werden.

§. 122. Anwendung dieser Gründe, um einzelne Fälle, in welchen Decimalen gebraucht werden, zu verstehen.

§. 123. Beseitigung einiger Anstößigkeiten, welche Rechnern, die blos an ganze Zahlen gewöhnt sind, bei der Bezifrung mit Decimalen, anfangs auffallen.

§. 143. Ueber die vorzüglich-nüzliche Anwendung der Decimalen bei Divisionen, um die Reste im Quotienten bequemer anzuzeigen.

§. 144. Ueber die Vortheile, welche der Decimal-Calkül bei Zinsrechnungen insbesondre gewährt.

§. 145. Ueber die Benützung der Decimal-Methode, um Wurzeln, insbesondre Quadratwurzeln, aus Grösen aller Art auszuziehen.

I. Abschnitt.

Vom Zählen;

insbesondre vom sogenannten Numeriren.

§. 1.

Kinder lernen zählen, indem sie Dinge gleicher Art nebeneinander hinstellen, oder schon zusammengestellt ansehen, und deren Vielheit mit Worten bestimmt anzudeuten sich bemühen.

Dieses bestimmte Andeuten, und Ausdrükken mit Worten, gelingt ihnen anfangs gar nicht immer. Sie ahmen dabei die Benennungsweise ihrer Eltern nach, und lassen sich zurecht weisen, wenn ihnen die gehörige Ausdrükke fehlen.

Man denke ein Kind, das einen Apfel in der Hand habe; die Mutter reicht ihm noch einen dar, und spricht: Nun hast du zwei! — Ein älterer Bruder des Kinds sizt etwa gegen-

über, zeigt die Aepfel vor, die er hat. Er hat einen mehr, und spricht:

"Sieh, ich habe drei! Du hast einen weniger!"

Solche kindische Vorfälle erwekken die Aufmerksamkeit des Kinds, und reizzen es, Belehrung anzunehmen, wie man viele gleichartige Dinge mit einemmal ausspreche. Das öftere Ansehen der zehn Finger bringt es bald dahin, bis auf zehn zählen zu lernen.

Die Menge der einzelnen Dinge ist aber bald gröser, bald kleiner; das Zusammenfassen der Einheiten in einen Ausdruk erfordert daher die Erinnerung an sehr viele Benennungen, welche das Kind von seinen Eltern gehört haben mus. Diese Gabe der Erinnerung ist bei Kindern sehr ungleich. Daher begreift dann auch ein Kind vor dem andern die Kunst, zu zählen, viel früher und schneller. — Indessen läuft doch die ganze Kunst bei jedem auf Erinnerungen gehörter Ausdrükke hinaus.

Diese Ausdrükke waren immer so beschaffen, daß dadurch die Vielheiten einzelner Dinge in kurze Worte bestimmt gesammelt wurden; sie waren die

Verbindungen gewisser wahrgenommener Einheiten in einen Laut, der Zahl genannt wird.

Man wird dieses sogleich verstehen, wenn man folgendes Beispiel überdenkt:

Ein

Ein Mann zeigt einem Kind vorüber ziehende, in Gliedern geschlossen einhertretende, Soldaten. "Siehst du, sagt er, in jeder Reihe oder in jedem Glied gehen sechs."
Er spricht also

eine Verbindung wahrgenommener Einheiten durch einen Laut, durch eine Zahl, bestimmt aus. "Nun (fährt er vielleicht fort) "aus wie viel Reihen besteht wol die ganze "Compagnie? zähle da von oben herunter!"— Das Kind zählt (etwa an den Fingern) und spricht aus: "Gerade zehn Reihen sinds!" — Wie viel Soldaten gehen aber nun wol zusammen in den zehn Reihen? — —

Diese angehängte Frage dringt sich dem Kind wol sehr natürlich auf. Die Antwort darauf giebt dem Alten alsdenn den nächsten Anlaß, dem Kind Belehrung zu ertheilen, wie man Mengen, deren Einheiten über zehn hinausreichen, und zwar weit darüber hinausreichen, am bequemsten in Zahlen zusammenfassen, und aussprechen könne.

"In den zehn Reihen gehen zusammen sechzig Soldaten; (sagt er ihm etwa) davon kannst du dich auf mehr, als eine Weise, gewiß überzeugen. Nimm einmal die Feder, und zeichne sechs Punkte auf ein Papier hin:

. . . . . .

„Das ist eine Reihe! Zeichne noch ein„mal sechs Punkte; und zähle sodann zusam„men;

. . . . . .

. . . . . .

„Zwei Reihen enthalten zweimal sechs Punkte; „das nennt man zwölf Punkte. Das sind „zwei über zehn. Nun zeichne noch eine Reihe, „und zähle wieder zusammen; ich will dir „forthelfen, wo du etwa (über zwölf) stekken „bleiben mögtest! . . .

So fährt der Alte gleichförmig fort: Wenn fünf Reihen gezeichnet sind, und die Zahl dreisig ausgesprochen wird, dürfte es aber wol sehr räthlich seyn, stille zu halten, und dem Kind zu bedeuten, daß nunmehr der halbe Weg zurükgelegt sei; und daß die Vielheit der vorhandenen Punkte, doppelt genommen, in einen Ausdruk gesammelt, sechzig ausgesprochen werde. Alles, was man Kinder durch Verdoppeln lernen kann, geht ihnen am leichtesten ein; das ist eine sehr bewährte zuverlässige Wahrheit! —

Das weitre Verfahren, wenn man von sechs zu sechs fortschreitet, geht ganz auf ähnliche Weise von statten, bis man zu der Schluß-Zahl sechzig gelanget.

Hierauf aber kann der Alte auch dem Kind zeigen,

zeigen, wie man durch Anlegung kürzerer Reihen z. B. von 4 Punkten

. . . .

und fortgeseztes Untersezzen ebenfalls zu der Zahl Sechzig gelangen könne; und dann ferner, wie man durch Reihen von fünf Punkten, wie auch endlich durch Reihen von zehn Punkten eben dazu gelange.

So lernt das Kind auf mehrern Wegen zu einem und ebendemselben Ziele gelangen. Hierüber läßt sich nichts allgemeines, das für jeden Lehrer eine gesezliche Vorschrift wäre, vorschreiben; nur das ist nicht in Abrede zu stellen, *) daß die ebenerst und zulezt genannte Benehmungsweise, mit Anlegung von zehn Punkten und deren Wiederholung, nemlich

mit . . . . . .

. . . . . .

und so weiter

zu grössern Zahlen gegen Hundert, und drüber, fortzuschreiten, die wichtigste sei, welche wegen der ganzen Einrichtung der Zahlen-Erfindung, wie sie einmal angenommen ist, am meisten in Uebung gebracht, und Kindern aller Art durchgehends

(*) Eine umständliche Abhandlung über die mannigfaltige Methoden, nach welchen man Kinder zählen lernen kann, darf man hier nicht erwarten. Anstatt Punkte zu zeichnen, kann man auch Rechenpfennige gebrauchen, auch die Arbeit mit Rechenbrettern erleichtern. . . .

hends recht aeflissentlich bekannt gemacht werden mus. Die nächsten Blätter werden diese Angabe (der erwähnten Wichtigkeit) bald zur Genüge rechtfertigen.

§. 2. Die Abwesenheit aller Zahlen wird durch das Zeichen o angedeutet. Man nennt es Null, auch Zero. Null ist keine Zahl, aber eine Zifer. Man spricht daher Null-Zifer, nicht aber Null-Zal. Das erste Zehnd der einfachen Zahlzeichen heißt bekanntlich

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Man nennt diese Reihe von Zifern eine Dekade, weil Deka im Griechischen Zehn heißt. Die Figuren selbst sollen von den Arabern entlehnt seyn.

Die Römer bedienten sich folgender Zeichen:

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX. X.

Die Griechen sezten Buchstaben ihres Sprach-Alphabets für Zahlzifern.

Die deutsche Benennung der angeführten obigen Figuren ist:

Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn.

Die nächstfolgende Dekade ist

11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.

Sie ist aus der ersten hergeleitet; und die Figuren derselben heissen zusammengesezte Zahlzeichen. (Genau genommen ist schon die lezte

Zifer

Zifer der ersten Dekade, nemlich 10, zusammengesezt, aus 1 und 0.)

Auch die Sprache drükt den Charakter der Zusammensezzung schon, meistens sehr deutlich, aus, jedoch eine Sprache bei einzelnen Zifern deutlicher, als die andre. Die deutsche benennt

Eilf, zwölf, dreizehn, vierzehn, fünfzehn, sechzehn, siebzehn, achtzehn, neunzehn, zwanzig.

Die Benennung, dreizehn, stellt die Bezeichnung (13) weit vernehmlicher dar, als die Benennung, eilf, das Zeichen (11). Im Lateinischen ist diese Vernehmlichkeit schon bei XI, insoferne Vndecim dabei ausgesprochen wird, so stark, als bei XIII (Tredecim)

Es kostet nicht viele Mühe einzusehen, daß die angeführte Bezeichnung der zweiten Dekade bei den arabischen Zifern durchgehends eine Abkürzung folgender Zahlen in sich fasse:

Anstatt 10 und 1 wird geschrieben 11
Anstatt 10 und 2 wird geschrieben 12
Anstatt 10 und 3 wird geschrieben 13
. . . . . .
Anstatt 10 und 10 wird geschrieben 20.

Eben die Beschaffenheit hat es mit der 3ten Dekade.

Anstatt 20 und 1 wird geschrieben 21 u. s. f. Ebenso mit der Vierten; mit der Fünften; bis in die Zehnte.

Wer darüber einige Zeit nachdenkt, dem mus wol folgende allgemeine Gesezlichkeit bald einleuchten:

Die vordre Zifer jeder Zahl aus der zweiten Dekade hat nicht eine einfache, sondern eine zehnfache Geltung; die hintre Zifer aber behält die Geltung, welche in der ersten Dekade angenommen ist, schlecht hin.

Daher der Ausspruch der Rechenmeister:

In der hintersten Stelle stehen Einer
In der nächsten vorlezten Stelle stehen Zehner.

Jeder Einer ist eine Vielheit von Einheiten; (Blos 1 ausgenommen.) z. B. 6 ist eine bestimmte Vielheit von 6 Einheiten.

Jeder Zehner ist eine bestimmte Vielheit von Einheiten zehnfach genommen, z. B. 60 enthält die Vielheit von 6 Einheiten, zehnmal genommen.

§. 3. Man stelle vor sich hin:

20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Das sind durchgehends Zahlen der folgenden Dekaden nach der ersten.

Man sezze die Ueberschüsse der einzelnen Einheiten zwischen jedes Zehend bei, so erhält man die natürliche Zahlen bis Hundert.

z. B. zu 80 hinzugesezt 1 giebt 81
zu 80 hinzugesezt 2 giebt 82 u. s. f.

So ergiebt sich, wie man bis 100 zählen, und auch die Zahlen schreiben lerne.

Wol erwogen hat man aber damit bereits addirt. Denn Zahlen zu einander (sei's auch nur in Gedanken) hinzuthun, und die vermehrte Zahlen-Gröse mit einemmale aussprechen, das ist eben die Operation, die man Addiren, Addition heißt. Es ist also wol gar kein Zweifel in die Richtigkeit folgender Behauptung zu sezzen:

„Zählen, oder das so genannte Numeri-
„ren läßt sich ohne Addiren gar nicht
„lernen. Wer numeriren kann, kann
„gewiß auch addiren!

Daher haben die neuern Arithmetiker grösten-theils die so betittelte

zwei Species Numeration
und Addition
in eine zusammen geworfen,

und sprechen deshalb auch nicht mehr von 5, sondern nur von 4 Species der Rechenkunst.

Indessen mögen doch die Belehrungen über die formale Einrichtungen der Summationen verschiedener Grösen aus Dekaden und Hunderten, und Tausenden, in einem besondern Capitel, das Addition zur Aufschrift behalten kann, vorgetragen werden.

§. 4. Wer einmal die Bezifrung bis 100 versteht, wird die bis 200 gar leicht fassen.

Er betrachte nur zuerst die Bezeichnungen bis 109. Schlechthin werden der Zahl Hundert

da Einheiten beigefügt, im Schreiben aber der Kürze wegen

anstatt 100 und 1 gesezt 101
anstatt 100 und 2 gesezt 102

und so wird allemal die lezte Nulle (in 100) durch eine Einheit verdrungen.

Von Hundert und zehn an aber werden zwei Nullen (in 100) verdrungen; nehmlich

anstatt 100 und 11 schreibt man 111
anstatt 100 und 12 schreibt man 112

Die Dekaden 110, 120, 130, . . . 190 bis 200, durch Einheiten zu ergänzen, oder auszufüllen, ist dann gewiß eine sehr natürliche Kunst. Man schreibt:

111, 112, 113, . . . 119, 120.

Von 200 bis 300 besteht ebendasselbe Verfahren. Man gelangt damit auf vollkommen gleiche Art bis 800, bis 900, und von da bis Tausend, welches die Bezeichnung mit 4 Zifern (1000) hat.

So lange man Hunderte vor sich hat, es seien Zehner oder Einer dabei oder nicht, so kommen immer drei Zifern vor. Die 1ste dieser drei Zifern hat hundertfache Geltung, z. B.

in 500 denkt man 5 Einheiten hundertfach, oder statt einer Einheit Hundert, und das fünfmal.

Der Werth der Zifern wächst also mit ihrer Vorrükkung in die 2te, in die 3te Stelle, vom Ende genommen, oder die Stelle bestimmt ihre Geltung.

In

In 536 ist 5 nicht schlechthin 5, sondern 500
und 3 nicht schlechthin 3, sondern 30
aber 6 ist und bleibt eine einfache Zal
der ersten Dekade, sechs.

§. 5. Tausend ist ein kurzer Ausdruk für Zehnhundert in der Sprache.

1000 ist ein kurzer Ausdrukk in der Bezifrung,

anstatt 10 mal 100; oder auch anstatt 990 und 10.

Wie man von 99 auf 100 übergeht, eben so geht man von 999 auf 1000 über.

Die Ueberschüsse etwa vorhandener Zahlen über 1000 nehmen die hintern drei Stellen ein.

In 1536 gilt 1 nicht schlechthin 1, sondern 1000
5 . . . 5 . . 500

Ebenso verhält sichs mit den Bezifrungen von zweitausend, dreitausend . . . . . mit 2000, 3000, . . .

Jede Zifer in der 4ten Stelle hat also tausendfache Geltung.

Ueber grösre Zahlen, die über 9000, und 10000 gehen, kann ich mich nun kurz fassen. Durch ganz gleiche Schlüsse kommt man zu der baldigen Einsicht, daß allerdings

10000 so viel als zehntausend
100000 so viel als hunderttausend
1000000 so viel als zehnhunderttausend

bedeuten werde. Zu Abkürzung der Sprache nennt man diese lezte Gröse eine Million.

2300000

2300000 wird ausgesprochen:
zwei Millionen, und 3 mal hunderttausend.

Die Zifer, welche eine Million andeutet, steht allemal in der siebenten Stelle, vom Ende an gezählt.

Noch höhere Zahl-Grösen können bis auf Billionen bis auf Trillionen .... steigen.

Die Zifer für die Billion steht in der 13ten Stelle; die für die Trillion in der 19ten.

Angehende Rechner viel mit Zahlen, die über 10000 hinausreichen, zu beschäftigen, ist übrigens niemals räthlich. Man beschwert dadurch ihr Gedächtniß, oder muthet ihm doch Anstrengung zu, welche öfters Abneigung gegen Arithmetik überhaupt erwekket. Wenn sie einsehen gelernt haben, wie viele Aenderungen und Verbindungen sich nur mit den Zahlen von 1 bis 1000 vornehmen lassen, so werden sie wol die wenigen Kunstgriffe selber errathen, welche nöthig sind, um mit höhern Zahlen geschikt umzugehen.

§. 6. Die Weise der ältern Arithmetiker, die Numerationen hoher Zahlen, welche über Tausend hinausgehen, durch Strichlein, oder Kommata, welche unter je drei und drei Zifern angebracht werden, zu erleichtern, indem sie, z. B. die Zal 423625 so bezeichnen: 423,625; ist übrigens darum verwerflich, weil diese Bezeichnung in der Decimal-Bruch-Rechnung schon längst rechtlich eingeführt ist, und daraus

auf

auf keine Weise sich verdrängenläßt, in dieser Bruchrechnung aber

423,625 die Geltung von vierhundert, und drei und zwanzig, nebst 5 Achtel

bedeutet, nicht aber

vierhundert, drei und zwanzig tausend, 600 und 25

wie die Zahl 423625 doch ausgesprochen werden soll und mus.

Durch Erläuterungen, welche erst auf viel weiter unten folgenden Blättern gegeben werden können, wird dieses deutlich genug erhellen. Hier mag nur einstweilen in Kürze der Rath stehen, die Strichlein, (wenn sie je nicht gar entrathen werden mögen) lieber oberhalb der Zifern anzubringen, wie mehrere alte Arithmetiker auch wirklich schon hie und da in Uebung zu bringen gesucht haben, indem sie schrieben:

423′625; oder 2″300′000;

und damit beim Aussprechen vielziferichter Zahlen, Verirrungen vorzubeugen, bedacht waren. Der Zwek der Erleichterung wird dadurch erreicht, und aller Misverstand bleibt doch auf diese Weise vermieden.

II. Abschnitt.

Vom Addiren
ganzer Zahlen.

§. 7.

Eine Zahl kann zwei kleinern zusammengenommen gleich seyn. Z. B. 7 ist den Zahlen 3 und 4 zusammen gleich.

Sie kann auch drei, auch vier, auch mehrern Zahlen zusammengenommen gleich seyn. In so ferne sie dieses nun ist, heißt sie eine Summe.

Jede Zahl kann eine Summe vorstellen, oder wirklich dafür angesehen werden.

2 ist die Summe von 1 und 1;
3 ist die Summe von 2 und 1; auch von 1 und 1, und 1.
4 ist die Summe von 2 und 2;
auch von 2 und 1 und 1;
auch von 3 und 1; auch von vier Einheiten.

Grösere Zahlen bestehen aus mehr kleinern; und ihre Zusammensezzung steigt mit ihrer Grösse.

Eine kleinere Zahl und eine grösere zusammensezzen, und die vermehrte Grösse mit einemmal aussprechen, heißt Addiren.

Nach allgemeiner Gewohnheit schreibt man die Zahlen, die eine vermehrte Grösse zusammen

geben

geben sollen, senkrecht untereinander, zeichnet unmittelbar unter sie einen Strich, und unter diesen die Summe.

2 1
7 4
3
Summe: 9 8

Da hat das Zusammenzählen noch gar keine Schwierigkeit, weil die Summe der Zifern in der lezten senkrechten Reihe nicht über die Zal 10 hinausreichen. Aber gar öfters werden sie drüber hinausreichen, ja wol, wenn die Reihe lang oder hoch ist, über 100. Wie hat man sich in diesen Fälten zu benehmen?

§. 8. Man nehme an, es komme vor:

4 9
1 8
6

Da zähle der Anfänger: 6 und 8 giebt zusammen 14, dazu noch 9, giebt zusammen: 23. So groß ist die Summe der lezten senkrechten Reihe. Nun gehe er zur zweiten senkrechten Reihe, und zähle deren Zahlen zusammen. Ihre Summe beträgt: 50. Zwar die Summe der Zifern (1 und 4) an sich beträgt nur 5; aber er erinnre sich aus den Vorträgen des obigen §. 2. (S. 8.) daß alle Zifern in der zweiten Stelle (vom Ende gezählt) Zehner

ner bedeuten, folglich nicht 4 und 1, sondern 40 und 10 die wahre Summe für diese zweite Reihe abgeben. Unleugbar aber wird aus 40 und 10 zusammen genommen: 50. Er schreibe also nunmehr die Summen der beeden Reihen zusammen, und zwar so:

```
  2 3
und 5 0
-------
  7 3
```

Deren Summe ist:

Gleichförmig verfahre er bei gegebenen grösern Säzzen; z. B. bei

```
    9
  9 8
9 8 7
6 7 5
-----
```

Da schreibe er die Summen der einzelnen Reihen aus, und zwar so:

die lezte Reihe giebt 29
die zweite = giebt 240
die dritte = giebt 1500

Die Summe des Ganzen ist daher: 1769

Angehende Rechner sind der Pflicht, so umständlich zu addiren, durchaus nicht frühzeitig zu entlassen. Die Abkürzung, mit der man die Nullen am Schluß immer sogleich weglässt, gehört für Geübte, und ist grösstentheils schuld daran, daß junge Leute selber nicht wissen, wie sie zu der Summe, die man sie mechanisch untersezzen lehrt, kommen. Man wendet dagegen ein: „es sei unnöthige Weitläuftigkeit, Zifern zu schreiben, die man mit der Zeit nicht mehr schreiben darf!“ —

Sie

Sie ist aber nicht unnöthig. Denn es ist allerdings sehr wichtig, daß dem angehenden Rechner ganz anschaulich vor den Augen stehe, was ihm zusammen zu zählen obliege? Wenn man die Nullen hinsezt, so sieht er das untrüglich ein, und weis gewiß, was er addirt, und in der Summe zusammenbringt, nehmlich

durchgehends Einheiten;

so in dem leztern Beispiel:

2 9 Einheiten
2 4 0 Einheiten
1 5 0 0 Einheiten

Damit ist alles auf

Gleichartigkeit

zurükgeführt, blos gleichartige Grösen aber lassen sich zusammen zählen, und in eine Summe werfen. Auf dieses erste Gesez des menschlichen Verstandes kann nicht genug Aufmerksamkeit empfohlen werden.

In einem gewissen Verstand kann man behaupten: „Zehner und Einer lassen sich an sich gar nicht addiren.“ Zehner sind Haufen von Zahlen; Liegen vier oder fünf solcher Haufen da, und darneben einzelne Einheiten, so ist an keine Zusammenzählung, an keine Summation, an kein Aussprechen in einer Summe zu denken, wenn man nicht die gedachten Haufen zuvörderst in Einheiten auflöst, wenn man nicht deutlich hinsezt:

Der Haufen enthält soviel Einheiten;
Der nächste Haufen, soviel;
Und dazu kommen die einzeln liegende Einheiten.

Nun erst ist Vereinigung in eine Summe möglich; damit ist erst eine Sammlung des Gleichartigen vorgegangen, und die Zahl unter dem Strich drükt diese aus.

§. 9. Der geübte Rechner mag, wenn er die senkrechten Reihen summirt, allerdings

anstatt
```
  2 9
  2 4 0
1 5 0 0
```
schreiben:
```
  2 9
  2 4
  1 5
```

In die Summe kommen einerlei Zahlen bei dem einen und bei dem andern Benehmen zu stehen.

Aber der geübte wird nicht einmal immer die Summen der einzelnen senkrechten Reihen aufs Papier hinschreiben; er wird in dem gesezten Beispiel von der ersten Summe 29 nur 9 hinschreiben, und die Zifer 2 sogleich in die zweite senkrechte Reihe übertragen, und dann addiren, als stünde diese zweite Reihe um die Zifer 2 (eigentlich um 20) vermehrt, gleich als ob

anstatt
```
  9 stünde;
  9 8
  9 8 7
  6 7 5
```
oder
```
  9
  9 8
  9 8 7
  6 9 5
  2
```
```
  9
```

Man

Man nennt dieses verdekte Uebertragen: Behalten.

Auch, wenn man mit der Summation der zweiten Reihe fertig ist, benimmt man sich ebenso bei der Addition der dritten. In dem Beispiel schreibt man von der Summe 269 blos 6 unter den Strich gerade wo die 2te Reihe herunter weist, und trägt wieder 2 in die dritte Reihe über.

Unleugbar erspart man durch diese Uebertragungen blos gedachter Zifern Papier und auch Zeit, weil das Geschäft damit hinweg fällt, die einzelnen Summen der Reihen aufzuschreiben, und dann erst dieselbe einzeln zu summiren. Auch müssen alle Rechner diese Kunst des Behaltens und Uebertragens ohne Zweifel lernen. Aber es ist dennoch räthlich, in der einfachen in dem vor §. 8. gezeigten Methode, Anfänger vorher wol zu üben, ehe man ihnen diese Abkürzungs: Weise empfehle. Sogleich in den ersten Lectionen beim Addiren damit anzufangen, ist schlechterdings verwerflich; und unbegreiflich, wie in so vielen Rechenbüchern darauf nur angetragen werden konnte. Die nothwendige Vorstellung, daß blos gleichartige Grösen zusammen gezählt werden können, und sollen, wird damit fast ganz übergangen, und zurükgehalten.

Auch, wenn man das Behalten anfängt, kann nicht genug erinnert werden, daß man

beim Uebertragen in die zweite Reihe nicht 2, nicht 3, sondern genau 20, 30, u. s. w. behalte.

Was von der zweiten und lezten Reihe auf den lezten Blättern (von S. 16 an) umständlich vorgetragen worden, läßt sich wohl ohne Mühe auf die zweite und dritte senkrechte Reihe (vom Ende an gezählt) anwenden. Die Gesezze der Uebertragung sind die nehmlichen, nur daß man da merke, es werde von der 2ten Reihe in die 3te nicht schlechthin 2, nicht 3, sondern 200, 300 und s. w. wirklich übergetragen.

§. 10. In gar vielen Vorfällen kommen lange oder hohe senkrechte Reihen, Columnen, von Zahlen, welche zu addiren sind, vor. Wie man da am bequemsten, und zugleich am sichersten addirt, oder, nach dem Ausdruck der Schreiberei, laterirt, ist schon oft gefragt worden. Unter den mancherlei Vorschlägen, die dabei vorgebracht worden sind, mag hier folgender immer einige Rükficht verdienen:

Man gewöhne das Auge an, zwei zunächst übereinander stehende Zifern mit einemmal zu fassen, und wenn dieselbe heissen:

1 2 3 4
9 8 7 6

sogleich in Gedanken zehn zu zählen;

Ferner, wenn in gleicher Nähe übereinander stehen

2	3	4	6
9	8	7	5

abermals zehn zu zählen, und die überschiessende 1 für die nächsthöhere Zifer aufzubehalten, und dahin schnell überzutragen.

Diese Uebertragungen in Gedanken gehen sicherer von statten, als die von Columne zu Columne, oder von der Summe jeder Reihe auf die nächstvorhergehende, wenn die Columnen lang, oder der zu addirenden Sätze viel sind. Denn in diesem Fall ist und bleibt es allerdings räthlicher, die Summe jeder Reihe einzeln auszuschreiben, wie auf S. 16 angegeben worden, (nur, daß der Geübte die hintern Nullen weglassen mag.) Wenn man nach rechnet, und die vorgenommene Addition prüft, (welches gar oft erst an einem folgenden Tag erforderlich seyn kann,) so kommen die niedergeschriebene einzelne Nummern dem Rechner gar sehr zu statten. Wie viel er in Gedanken beim ersten Addiren am Ende jeder Columne behalten habe, kann er schwerlich mehr in einer Stunde nach der ersten Arbeit wissen.

Anmerkung. Aeltere Arithmetiker haben Proben über vorgenommene Additionen vorgeschlagen, welche auf Nachrechnungen hinaus laufen, die oft beschwerlicher sind, als die erste Rechnung selbst war. Die beste Probe ist: man zähle das 2te mal jede Reihe oben herunter, wenn man das

ste mal von unten hinauf gezählt hat. Trift man beede mal in einer Summe für jede Columne harmonisch zusammen, so kann man die Rechnung meistens für bewährt annehmen.

Proben von der Zuverlässigkeit aber, welche man bei den andern Rechnungsarten, von welchen die nächstfolgende Blätter handeln, sich geben kann, haben beim Addiren einmal nicht statt.

§. 11. Es ist in den meisten Rechenbüchern eingeführt, Belehrung über

die Additions-Kunst mit benannten Zahlen zu geben,

wenn man die allgemeine Weise, mit unbenannten zu addiren, vorgetragen hat.

Man nennt, benannte Zahlen, solche, bei welchen angegeben ist, ob sie Geld-Sorten, Gulden, Groschen oder Kreuzer angehen; oder Fruchtmaas Abtheilungen, Malter oder Simmri, oder Gewichte, Centner oder Pfunde, und Lothe.

Diese Anwendung der Addition kann in der That in gar vielen Fällen einem, der noch nicht weis, was dividiren ist, gar nicht hinlänglich deutlich vorgetragen worden, wie wir in der Folge unwidersprechlich darthun wollen; und es ist daher unmethodisch, jezt schon die Belehrungen über Zusammenrechnungen, der

gedach-

gedachten Gelder, Maaße, und Gewichte ... beibringen zu wollen. Indessen lassen sich dennoch, wenn man Beispiele mit niedrigen Zahlen, und von wenigen Sätzen anführt, einige nüzliche Wahrheiten lehren, womit angehende Rechner ohne Nachtheil frühzeitig unterhalten werden können.

Man sezze: einer hätte vor sich liegen
3 Gulden, 8 Kreuzer 3 Pfenn.
und erhielte dazu 7 Gulden, 57 Kreuzer 2 Pfenn.
so kann er freylich, wenn er die Summe von allem dem Geld wissen will, sprechen:
Das sind
10 Gulden, 65 Kreuzer, 5 Pfennige.

Damit hat er schlechthin, und nicht unrichtig addirt. Aber sein Ausdruck der Summe läuft gegen den Sprachgebrauch, und gegen die Gewohnheit, nach welcher man eine Summe von 4 Pfennigen kurz 1 Kreuzer und eine von 60 Kreuzern kurz 1 Gulden nennet.

Daraus folgt nun, daß die Summe des Geldes im Beispiel, von dem Anfänger so ausgesprochen, und zugleich so gesezt werden mag:
10 Gulden
und 1 Gulden, 5 Kreuzer
und 1 Kreuzer 1 Pfenn.
Das heißt aber kürzer:
11 Gulden, 6 Kreuzer, 1 Pfenn.

Was aber der Anfänger so nach und nach erst zusammen ordnet, das bringt der Geübte viel schneller zu Stande. Dieser sieht sogleich, daß mehr und wie viel mehr Pfennige in den 2 Sätzen vorhanden seien, als auf einen Kreuzer gehen, und schreibt dann blos den Ueberschuß über 1 Kr. unter den Strich am Ende. Den einen Kreuzer aber trägt er auf die nächste Reihe über, und zählt anstatt 57 und 8 sogleich 58 und 8, das ist: 66 Kreuzer. Weil aber diese Zahl 6 über 60 hinausreicht, und 60 Kr. schon einen Gulden ausmachen, so läßt er auch hier Uebertragung eintreten, und addirt bei den Gulden, anstatt 7 und 3 sogleich 8 und 3, womit er

11 Gulden, 6 Kr. 1 Pfenn.

zur Summe unmittelbar untersezt.

Wiederholung mehrerer Additionen von solcher Zusammensetzung bringen jeden bald zu einer Fertigkeit, welche sich allerdings alle Rechner in Zeiten verschaffen müssen. Viele Regeln aber lassen sich dabei weiter nicht geben.

Sätze für Fruchtmaase sind:

	17 Scheffel,	3 Sri,	2 Vierling
Dazu	19 Scheffel,	6 Sri,	3 Vierling
Summa:	37 Scheffel,	2 Sri,	1 Vierling

Dabei wird vorausgesezt, daß man wisse: 4 Vierling machen 1 Sri aus; und 8 Sri einen Scheffel.

Sätze

Sätze für Gewichte sind:

16 Centner, 84 Pfunde, 19 Lothe
Dazu 4 Centner, 23 Pfunde, 17 Lothe

Summe: 21 Centner, 8 Pfunde, 4 Lothe

wobei man wieder die bestimmte Voraussetzung kennen muß, daß 32 Lothe auf 1 Pfund gehen, und 100 Pfunde auf 1 Centner.

In beiden Fällen müssen Anfänger zuerst die Suminen deutlich ausschreiben, nehmlich

36 Sch. 9 Sri, 5 Vierl.
20 Cent. 107 Pf. 36 Lothe

und das Ausrechnen im Kopf, und Behalten ohne Aufzeichnung nicht zu frühe versuchen.

Einige Lehrer suchen einen Ruhm darinn, daß sie gleich nach den ersten Lectionen Kinder nöthigen, sich bei solchen Beispielen anzustrengen, und ihnen wehren, eine Feder anzusetzen, bis sie die reducirte Summe sogleich richtig niederschreiben können. Die Zumuthung einer solchen Anstrengung ist aber sehr unräthlich, wenn sie mit Eile geschieht. Allmälige Anleitungen, die das Kind nach und nach selbst darauf führen, daß sich einige Sätze wohl füglich abkürzen liessen, sind weit mehr zu loben.

§. 12. Bei leichten Beispielen dieser Art läßt sich übrigens wieder die Erläuterung

von dem Gesetze der Gleichartigkeit beim Zusammenzählen beibringen.

Die 2 Geld-Sorten Kreuzer und Pfennige lassen sich an sich nicht zusammen addiren. 65 Kreuzer und 5 Pfennige sind abgesonderte ungleichartige Dinge. Aber weil es allem Gebrauch im gemeinen Leben gemäs ist, daß 4 Pfennige so gut, als 1 Kreuzer, angenommen wird, so lassen sich allerdings 4 Pfennige, als die Einheit eines Kreuzers denken, und diese

gedachte, und in Geltung wirklich vorhandene Einheit

läßt sich demnächst ohne Anstand

zu den 65 Einheiten der Kreuzer

hinzuzählen, auf deren Haufen gleichsam hinlegen, so daß die gleichartige Stücke in demselben durch etwas gleichartiges damit vermehrt werden, oder einen homogenen Zuwachs erhalten.

Gleichförmig wird bei Gulden und Kreuzern verfahren. Bei 66 Kreuzern erinnert man sich, daß 60 Kreuzer die Einheit eines Guldens vorstellen, diese Einheit kann man nun zu den 10 Einheiten der Gulden hinzuthun, weil die geschehene Reduction auf Gleichartigkeit alle Hindernisse der Vereinigung hebt; 10 Gulden und 1 Gulden sind ja gleichartige Dinge. So gelangt man zu der Summe: 11 Gulden.

Eben diese Betrachtungen lassen sich auf

die

die Unterabtheilungen bei Fruchtmaaßen und Gewichten anwenden. 8 Sri machen die Einheit eines Scheffels, oder Malters aus; 32 Lothe die Einheit eines Pfundes.

Einheit und Einheit ist also sehr verschieden; es kommt darauf an, wie sie zusammengesezt ist, was unter ihr jedesmal begriffen wird, welche kleinere Dinge auf sie reducirt sind. Diese kleinere Dinge sind auch wieder Einheiten, und blos eine bestimmte Menge von ihnen macht die grössere Einheit aus.

Blos in Beziehung hierauf lassen sich die Ausdrükke der Gelehrten verstehen, welche

von synthetischer Einheit,
von Synthesis des Mannichfaltigen
zur Einheit

sprechen. Synthesis ist ein griechisches Wort, und heißt Zusammensetzung. Die mannichfaltigen Dinge, von denen hier die Rede ist, müssen gleichartig seyn, von einer Gattung, (homogen) wenn sie ein Ganzes ausmachen sollen. Ungleichartige (heterogene) Dinge können keine Zahlgrösen-Einheit zusammen ausmachen.

§. 13. Zur Form der Addition gehört, daß man endlich auch noch das einfache Zeichen kennen lerne, wodurch Addition angezeigt wird.

Es ist ein Kreuz: + wo dasselbe zwischen

zwei oder mehren Zahlen befindlich ist, wird das Wort: Plus, das Mehr bedeutet, ausgesprochen.

z. B. 3 + 5 wird gelesen: Drei Plus fünf.

Ich halte es für räthlich, hiebei das Zeichen der Gleichheit, welches durch zwei horizontale Striche = angedeutet wird, dem Plus-Zeichen unmittelbar beizufügen. Man schreibt

3 + 5 = 8 und liest: Drei Plus fünf ist gleich acht, oder: äqual acht. Der lateinische Ausdruk, die zwei Striche das Aequal-Zeichen zu heissen, ist sehr gebräuchlich; Wenn er gleich gar nicht rein deutsch ist, so muß man ihn dennoch kennen.

Es ist ein groses Vorurtheil, wenn manche ältere Rechenmeister, sobald sie in einer Rechnung ein Plus und ein Gleichheits-Zeichen ersehen, sogleich ausrufen: „Das ist Algeber!" Diese Zeichen, auch mehrere andre dazu, machen Algeber noch gar nicht zu dem, was sie ist; noch zeugen sie von der Erforderniß, daß gerade, wo sie stehen, Algeber angewendet werden müsse.

Auch, wenn irgendwo vorkäme:

176 + x = 293

wodurch angedeutet würde, 293 bestünde aus 276 und einer noch unbekannten Zahl, für welche allgemein einstweilen ein Zeichen (x) hingesezt worden, so ist dieß wieder noch nicht

Alge-

Algeber. Doch kommen in Behandlung der einfachen Algeber Sätze von der leztern Gattung allerdings vor, und wir werden unten mit denselben, wenn sie in Verbindung ganz anders geordneter Grösen aufgestellt werdeu, (wie ich hoffe) nach und nach ganz leicht umzugehen lernen.

Hier sollte blos eine Verwarnung gegen das Vorurtheil, das gegen diese einfache Zeichen scheu macht, in Kürze angebracht stehen. Diese Verwarnung ist auch auf die Folge zu beziehen, wo das dem Plus entgegengesezte Zeichen, (am Ende der Subtraction) wird bekannt gemacht werden.

III. Abschnitt.

Vom Subtrahiren

mit ganzen Zahlen.

§. 14.

Von jeder grösern Zahl läßt sich eine kleinere hinwegnehmen. Die grösere ist ja ohne Zweifel eine Menge von Einheiten; Gehen einige davon ab, so bleibt eine kleinere Menge übrig, als die vorige; Das versteht jeder.

Das Hinwegnehmen heißt subtrahiren, vom lateinischen subtrahere, (wegziehen).

Das,

Das, was nach dem Wegzug von der grösern noch übrig bleibt, heißt der Rest, das Residuum, die Differenz.

Die erste Gröse, die vereiniget wird, heißt der Minuend.

Die zweite Gröse, welche verringert, oder weggenommen werden muß, um die erste zu verringern, heißt der Subtrahend.

Die Form der Subtraction ist: Man schreibe den Subtrahend unter den Minuend, Einer unter Einer; Zehner unter Zehner u. s. w. ziehe einen Strich unter beede, und setze unter diesen den Rest. Beispiel

Min.	8		3 6
Subtr.	3	oder	2 4
Rest	5		1 2

§. 15. Wenn diejenige Zifern im Minuend, welche senkrecht über denen des Subtrahends stehen, alle gröser, als diese leztern sind, (wie in der 2 Beispielen vor uns) so hat die Subtraction gar keine Schwierigkeit. Aber gar oft wird sich dieses nicht so beisammen finden; gar oft werden Sätze wie die folgende sind, zum Subtrahiren vorkommen:

Minuend.	3 6		4 0
Subtr.	1 9	oder	2 7

Wie kann da (fragt der Anfänger) 9 von 6 abgezogen werden? oder 7 von 0?

Die

Die erste Antwort an denselben ist billig folgende:

Schreibe anstatt 3 6 getheilt: 3 0 + 6
1 9 1 0 + 9

Aus §. 3 weist du, daß 30 und 6 gewiß so viel, als 36 bedeutet; eben die Ueberzeugung hast du von dem Minuend 19. Das Zeichen + kennst du aus §. 13. Hier kommt es dir schon wohl zu statten; das wird sich sogleich zeigen.

Da du 9 Einheiten von 6 nicht abziehen kannst, so entlehne 10 Einheiten von den 30, die dran zur Linken stehen. Gewiß ist es doch gleichviel, (insoferne man blos auf die Summe sieht,) ob einer 30 + 6, oder ob er 20 + 16 hat. Du darfst also sicher

anstatt 3 0 + 6 setzen 2 0 + 1 6
1 0 + 9 1 0 + 9

Und nun führe den Strich; ———
und subtrahire wirklich: 1 0 + 7 d. i. 17.
Ohne Zweifel beträgt der Rest 17.

Eben so verfahre bei dem zweiten Beispiel; Anstatt

40 schreibe 40 + 0 und als: 30 + 10
27 zuerst 20 + 7 denn: 20 + 7

Der Rest ist: 10 + 3 d. i. 13.

Durch Entlehnen oder durch Borgen von 10 Einheiten bist du also hier in beeden Fällen glüklich zu dem vorgesezten Ziele gelanget.

Auf

Auf ähnliche Weise hat man sich zu benehmen, wenn die Zifern in der Stelle der Zehner für sich kein unmittelbares Abziehen gestatten wollen, nur daß in diesem Fall nicht zehn, sondern 100 Einheiten entlehnt werden müssen.

Beispiel

Minuend	435	Ebensoviel	400 + 35
Subtrah.	272	ist:	200 + 72

Jeder sieht sogleich, daß sich hier zwar 2 von 5 abziehen lasse, aber nicht 72 von 35. Er schreibe aber die lezten 2 Sätze so:

300 + 135
so kann er nun abziehen: 200 + 72

und der Rest heißt: 100 + 63 d. i. 163

Hiese das obige Beispiel aber, etwas geändert, so:

431 so wäre zu: 400 + 30 + 1
272 erst zu setzen: 200 + 70 + 2

Alsdenn aber; 300 + 120 + 11
200 + 70 + 2

Da hiese der Rest: 100 + 50 + 9 d. i. 159

Es ist nehmlich nothwendig, in diesem Fall die Zahl 431 in drei Sätze zu zerschlagen, weil in dem Subtrahenden, 272, die zwei lezten Zifern, 7 und 2, grösser, als die nächst drüber stehenden 3 und 1 sind, und daher zweimal entlehnt werden muß.

Auf diese Weise sieht nun der Anfänger, was bei Subtractionen vorgeht? wie sie thunlich sind? wie er borgen soll?

Wenn

Wenn er die Einsicht hievon hat, muß er aber auch mit den längst eingeführten Abkürzungen sich bekannt machen. Er wird nach einiger Uebung bald selbst erwägen, daß das Zerschlagen in Glieder, oder einer Zahl in mehrere, Zeit und Papier wegnehme, die man ersparen könne, wenn man

blos in Gedanken entlehne.

Er wird daher, wenn er von 36 die Zahl 19 (nach dem Beispiel S. 30.) abziehen soll, sogleich bei 6 sich 16 denken, und davon 9 wegnehmen; alsdenn aber nicht 1 von 3 abziehen, sondern nur 1 von 2; (eigentlich wol 10 von 20) und wird sich, wenn er andre Rechner stillschweigend und mechanisch so verfahren sieht, ihre Handlungsweise erklären können.

Es muß ihm auch aus solchen Darstellungen, wie in dem vorhergehenden §. 14 stehen, begreiflich werden, wodurch sich die Vorschrift, welche er in alten Rechenbüchern bei Exempeln folgender Art:

8003
6237

antrift, rechtfertige, wenn es darinn heißt:

„Sprich, 7 von 3; geht nicht! entlehne „eins von 8 über die 2 Nullen hinüber; und „subtrahire alsdenn 7 von 13; rest 6. Hierauf „sprich weiter, 3 von 9 (nicht von 0) bleibt

„wieder 6. Fahre fort, 2 von 9 (nicht von 0)
„rest 7; endlich 6 von 7; (nicht von 8) rest 1;
„so wird der ganze Rest 1766 heissen."

Ohne Zweifel bringt jeder, der auf diese Art verfährt, einen richtigen Rest heraus. Aber, wie er dazu gelange, sieht er gar nicht deutlich ein, wenn er's bei den blosen Vorschriften bewenden läßt. Wenn er hingegen den Minuenden 8003 in zwei Zahlen zerlegt, nehmlich in

7990 + 13

und den Subtrahend. ebenfalls: 6230 + 7

und alsdenn den Rest nimmt: 1760 + 6

welcher natürlich so viel, als 1766 beträgt, so kann wol kein Zweifel bei ihm mehr übrig bleiben, daß der Rest so habe herauskommen müssen. Die Ueberlegung: „Wer 8003 hat, hat auch 7990 und 13 dazu, und nicht mehr, noch weniger!" kann ihm doch wol nicht schwer eingehen; noch die, daß

6237 = 6230 + 7

seyn. Sobald er aber von diesen Vordersätzen überzeugt ist, kann der Schluß auf den Rest unmöglich ausbleiben.

Befehlende Vorschriften, bei denen nicht Grund und Ursache angeführt wird, taugen schlechterdings in Arithmetik nichts; und doch sind, leider! unsre alte Rechenbücher ganz voll davon; ja wohl auch noch die meisten des lezten Jahrzehnd's selbst; gleich, als ob die

Sorge,

Sorge, junge Leute zum Nachdenken aufzumuntern, und ihre Begierde nach Warum? zu fragen, durch befriedigende Antworten zu beruhigen, gar keine Pflicht wäre!

Noch mag bei der Lehre vom stillen Borgen angemerkt werden, daß Anfänger wohl thun, wenn sie in den ersten Uebungen bei Subtractionen solcher Sätze, wie das lezte Beispiel enthält, durch Punkte, die sie oberhalb der Zifern im Minuend anzeichnen, die Entlehnung bemerken, als bei 8003 durch 8·0·0·3; damit sie nicht, wenn sie an die vordere Zahl (hier 8) kommen, durch einen Gedächtniß-Fehler, diese Zifer noch für voll annehmen, und damit unrichtig abziehen, d. i. zu viel in den Rest bringen.

§. 16. Es ist oben angeführt worden, (in §. 13 S. 27) daß der Rest auch die Differenz genannt werde. Differenz heißt Unterschied. Diese Benennung bezieht sich auf die Bemerkung, daß die Zahl des Restes unter dem Strich allemal angezeigt, um wie viel der Subtrahend von dem Minuend verschieden sei, um wie viel Einheiten er differire. Man sehe an

$$\begin{array}{r} 36 \\ 19 \\ \hline 17 \end{array}$$

Gewiß zeigt die Zahl 17 an, um wie viel 36 grösser als 19 sei; 17 ist also der Unterschied beider Zahlen.

Es läßt sich ohne Mühe einsehen, daß sich überhaupt die Benennungen: Subtraction, und Subtrahiren entbehren liessen, und daß man mit den Ausdrücken:

Differenz, und Differenzen ziehen,
oder den Unterschied nehmen;

hinlänglich auskommen würde, wenn jene fehlten, oder nicht schon eingeführt wären. Ich bin nicht gemeint, darauf anzutragen, daß sie gar abgeschafft würden. Aber die Vorstellungen von Differenz und Unterschied haben doch in der That einen gewissen Vorzug, welcher in der Doctrin selbst sich gar nicht verkennen läßt. Dieses wird aus mehrern folgenden Vorträgen sehr deutlich erhellen, und unter andern aus dem nächsten schon ziemlich genügend:

Jede kleinere Zahl differirt von der grössern; wenn man das, um wie viel die kleinere differirt, zu dieser legt, so kommt die grössere heraus. Das ist sehr natürlich! 5 ist von 7 um 2 unterschieden; Wenn man 2 zu 5 legt, so hat man eben die grössere Zahl 7.

Auf diese allgemeine Bemerkung gründet sich

die Probe bei der Subtraction.

Die

Die Regel in allen Lehrbüchern heißt:

„Addire den Rest zu dem Subtrahend;
„die Summe muß der Minuend selbst
„seyn. Ist sie's nicht, (weicht die Zahl
„ab), so hast du falsch subtrahirt."

Den Grund dieser Regel sieht man nunmehr wol hinlänglich ein, wenn man erwägt, was auf der nächstvorh. Seite steht. Der Rest zeigt ja nur den Unterschied der grössern und der kleinern Zahl an; zeigt nur an, um wie viel Einheiten, die grössere überschiest, (über die kleinere). Legt man diesen Ueberschuß der kleinern bei, so kann allerdings die Summe durchaus nicht von der grössern abweichen, vielmehr muß sich diese wieder damit ganz darstellen. Jeder vernünftige Mensch ist genöthigt, dieses Zusammentreffen einzugestehen, und muß einsehen, daß es nicht willkührlich sei, es für gültig anzunehmen, oder nicht.

Gar sehr anschaulich wird vollends alles, wenn man sich noch mit den sogleich anzuführenden Zeichen bekannt macht:

§. 17. Wir wissen, daß das Zeichen + Addition bedeutet. Das entgegengesezte Zeichen, blos ein einfacher horizontaler Strich — deutet Subtraction oder das Gegentheil von Zuwachs, Abnahme, an; und wird das Minus-Zeichen genannt. Allerdings muß sich der Saz

$$\begin{array}{r} 36 \\ 19 \\ \hline 17 \end{array}$$ auch durch 36 — 19 ist = 17

ausdrücken lassen. Man spricht diesen Saz mit Worten so aus:

36, Minus 19, ist 17;

Das heißt aber nicht mehr, als:

Von 36, abgezogen 19, bleibt 17.

Ohne Zweifel stehen also zu beeden Seiten des Gleichheits-Zeichens = gleiche Grösen; oder so viel zur Linken, als zur Rechten. Nemlich, man denke, ausgesezt, vor sich:

36, um 19 vermindert = Siebenzehn
d. i. 36 — 19 = 17

Nun schreibe man einmal zur Linken und zur Rechten folgendes noch bei:

36 um 19 vermindert, und um 19 vermehrt = Siebenzehn um 19 vermehrt

Was da steht zur Linken, und was da steht zur Rechten,

muß noch ganz gleich seyn.

Denn zu jeder Seite war ja eine Vermehrung um gleichviel vorgenommen. Hierauf drücke man alles, was da zur Linken und zur Rechten befindlich ist, mit kurzen Zeichen aus; man kann dieß gewiß auf folgende Art thun:

$$36 - 19 + 19 = 17 + 19$$

Wer

Wer möchte wol nur daran zweifeln, daß diese Gleichung richtig sei, so bald er die zuerst gesezte

$$36 - 19 = 17$$

annimmt, und für richtig erkannt hat?

Aber — 19 + 19 ist gar gewiß so viel als 0. Folglich kann man seßen

$$36 - 0 = 17 + 19$$

Und alsdenn — 0 ganz weglassen, weil 36, weniger 0, eben 36 selbst ist. Daher bleibt dann allein

$$36 = 17 + 19;$$ als Schlußgleichung.

Nun denke man zurük, was 17 + 19 ist; Es ist die Summe, die der Subtrahend und die Differenz miteinander machen;

indem ja gleich in dem allererſten Saz

$$36 - 19 = 17$$

die Zahl 19, als Subtrahend, und 17 als die Differenz anerkannt werden mußte. Da man also ohne Zweifel auf die Schlußgleichung auf einem gewiß rechtmäßigen Weg gekommen, und diese selbst gar nicht zu bezweifeln ist, (denn wer möchte leugnen, daß 17 und 19 zusammen 36 ausmachen), so ist damit anschaulich dargestellt:

wie bei jedem Subtractions-Fall die Addition des Subtrahenden und der Differenz den Minuenden selbst geben müsse.

§. 18. Was hier, freilich mit vielen

Worten, auseinander gesezt ist, übersieht der Geübte in der Folge mit einem Blik; er erkennt unmittelbar, daß (so gewiß, als 2 mal 2 vier ist) folgende Gleichungen zusammen gehören:

7 — 4 = 3; also 7 = 3 + 4
40 — 27 = 13; also 40 = 13 + 27
435 — 272 = 163; also 435 = 163 + 272

Mehrere Beispiele, in dieser Form dargestellt, führen auch gar bald zu dem zuverlässigen Schluß:

Auch wenn der Minuend eine noch unbekannte Gröse, x oder y, wäre; und man sezte hin,

x — 4 ist = 3; so muß auch x = 3 + 4 gelten;
Desgleichen, wenn Statt hätte:
y — 27 = 13; so muß auch y = 13 + 27 gelten;
z — 272 = 163, so muß auch z = 272 + 163 gelten.

Es ist gar nicht möglich, einen Widerspruch hiegegen einzulegen; So bald man nur die Zeichen der Sätze versteht, ist man genöthigt, einzugestehen, daß sie zusammen gehören, und daß die Richtigkeit des einen von der Richtigkeit des andern abhänge. „Die Differenz „zweier Grösen, mit der kleinern wieder vermehrt, giebt die grössere an, diese mag heisen, wie sie will, x oder y, oder z."

Man denke nur etwas nach, so wird man sich überzeugen, daß dieses ganz mit der Gesezlichkeit übereinkomme, die in jedem Rechen-

buch

buch steht: „Der Rest, und die abgezogene Zahl zusammen, machen die obere (den Minuendus) wieder aus.“

§. 19. Es läßt sich sicher behaupten, daß, wenn man den Innhalt der zwei vorigen Seiten gefaßt habe, man zu der Einsicht vollkommen zubereitet sei, wie sich das Problem, das ist, die Aufgabe auflösen lasse:

„Wenn der Unterschied zweier Grösen
„bekannt ist, von den zwei Grösen aber
„nur die eine, die andre unbekannte all-
„gemein zu finden.“

Die Auflösung läßt sich beibringen, ehe man noch Belehrung über Multiplication und Division gegeben hat. Ferner auch noch das verwandte Problem:

„Wenn blos der Unterschied zweier Grö-
„sen bekannt ist, und ihre Summe; wie
„sich die einzelne Grösen selbst hieraus fin-
„den lassen“

läßt sich sogleich auf das erst erwähnte anführen, und die Auflösung davon richtig darstellen. Allein um nicht gegen alte Vorurtheile allzusehr anzustosen, will ich den Beweis hievon versparen, und erst weiter unten vortragen. Ich würde wahrscheinlich durch den Schein von Schwierigkeiten allzu anstösig werden, wenn ich es wagen wollte, hier sogleich Buchstaben-Formeln ganz ohne Zahlen einzurücken. Und

wenn ich die Auflösung der Probleme ganz allgemein, das heißt, in der gehörigen Ausdehnung darlegen wollte, so könnte ich doch die Aufstellung solcher Formeln in der That nicht ganz umgehen. Daß man sich nicht dafür fürchten sollte, soll wol unten gezeigt werden. Daß aber ihr bloser Anblik, zumal auf den vordern Blättern eines arithmetischen Lehrbuchs doch tausende zurükschrekt, ist ausgemacht. Deren Einbildungen, in so weit es unschädlich seyn kann, etwas nachzugeben, halte ich aber dann doch der Klugheit angemessen.

§. 20. Mit benannten Zahlen zu subtrahiren, muß hiernächst noch vor Ende dieses Kapitels, gezeigt werden, wie mit benannten zu addiren am Ende des vorigen gezeigt worden. Die (S. 22) angezeigte Gesezlichkeit findet auch wieder Statt.

Ungleichartige Dinge kann man nicht zu einander addiren, und auch nicht von einander abziehen.

Gesezt, du solltest von 4 Pfunden 3 Loth abziehen, so kannst du nicht sprechen:

von 4 abgezogen 3, bleibt 1 Loth.

sondern du mußt die Pfunde oder doch ein Pfund den Lothen gleichartig, d. i. zu Lothen selbst machen, und dann erst hat der Abzug statt.

Es ist nicht nothwendig, daß du sogleich ganz ausrechnest, wie viel Lothe alle die 4 Pfunde

Pfunde ausmachen; wenn du nur weißt, daß 1 Pfund 32 Lothe halte; mit dieser Kenntniß versehen, denke so:

4 Pfunde sind = 3 Pfunde, und 1 Pfund weiter
das ist so viel, als: 3 Pf. und 32 Lothe
Und nun setze unter die Lothe: 3 Lothe
Hieraufziehe ab: Der Rest heißt: 3 Pf. und 29 L.

Eben so verhält sichs mit Geldabzügen. z. B.

Von 34 Gulden sollen
abgez. w. 12 Kreuzer.
so muß der Anfänger schreiben:

33 Gulden + 60 Kreuzer
Abgezogen: 12 Kreuzer
Rest: 33 Gulden + 48 Kreuzer

Ebenso muß er sich verhalten, wenn Sätze von folgender Zusammenordnung ihm vorgelegt werden:

von 184 Gulden, 17 Kreuzer, 2 Pfenn.
ziehen ab: 32 Gulden, 36 Kreuzer, 3 Pfenn.

Er muß da von den Kreuzern auf die Pfennige, und von den Gulden auf die Kreuzer, jedesmal ein Stük, oder eine der besondern Einheiten übertragen, gleich als ob der Minuend so hiesse:

183 G. + 60 Kr. + 16 Kr. + 4 Pfen. + 2 Pfen.
d. i. 183 G. + 76 Kr. + 6 Pfen.
Nun 32 G. + 36 Kr. + 3 Pfen.
Rest: 151 G. + 40 Kr. + 3 Pfen.

Nach

Nach und nach muß der Rechner hierauf sich angewöhnen, die 60 Kreuzer und die 4 Pfennige blos in Gedanken überzutragen, ohne diese Zahlen aufs Papier hinzuschreiben; er muß also sich bemühen, daß er es dahin bringe, blos

in der Vorstellung zu arbeiten,
in Gedanken zu borgen.

Eine fleisige Uebung wird ihn gar bald geschikt machen, dergleichen Sätze ganz kurz darzustellen, so, daß blos geschrieben wird:

184 G.	17 Kr.	2 Pf.
32	36	3
151	40	3

IV. Abschnitt.

Vom Multipliciren

mit ganzn Zahlen.

§. 21.

Wird eine Zahl etliche mal genommen, (zweimal, dreimal, mehrmal) so kommt natürlich eine größre Zahl heraus, welche man

ein Vielfaches, ein Multiplum von ihr,

nennen kann. Durch wiederholten Addiren kann man zu jedem Multiplum gelangen:

7 + 7

7 + 7 + 7 ist 21

Dafür sagt man kürzer: 3 mal 7 ist 21; und 21 heißt ein Multiplum von 7; bestimmt in diesem Fall, das dreifache von 7.

Man kann aber auch umgewendet behaupten; 21 ist ein Multiplum von 3. Denn die Zahl 3 siebenmal zu sich selbst addirt, ist allerdings wieder 21:

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 ist = 21.

Die zwei kleinern Zahlen, welche, in solche Verbindung zusammen gebracht, ein Multiplum geben, heißen die zwei Factoren, und das Multiplum selbst heißt, eben in Beziehung auf diesen Ausdruk, auch
das Factum, auch das Product.

Man stellt sich die 2 kleinern Zahlen gleichsam in Handlung (activ) vor, und nennt also, das was durch die erwähnte Zusammenordnung, und Vervielfachung der einen hervorgebracht worden, das Product.

In alten Rechenbüchern steht auch oft: das Facit. Neuere haben den Ausdruk: Facit wieder blos beim Addiren für Summe gebraucht. Andre haben ihn ganz vermieden, welchen wir beitreten, da er gänzlich entbehrt werden kann.

§. 22. Producte durch successives Zusammenzählen, durch Addiren einer Zahl zu sich selbst nach und nach, darzustellen, ist ohne
Zweifel

Zweifel den Menschen bald viel zu beschwerlich gefallen. Sie erfanden daher gewiß frühzeitig Abkürzungs-Methoden, und brachten dieselbe in Tafeln oder Tabellen, in Schemata zu schneller Uebersicht und zu Erleichterung des Gedächtnisses. Daher entstund die Bildung des sogenannten Einmal Eins, welches gewiß mehrere Hundert Jahre vor Christi Geburt schon bekannt, aber von Pythagoras nur in eine besondre Form gebracht war (etwa 500 J. vor C. G.) und nach ihm Abacus Pythagoricus noch izt genennt wird. Es mag hier beigefügt stehen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

In

In dem rechten Winkel zweier zusammenstosender Linien sizt ein Product zweier Zahlen; die Zahlen selbst stehen am Ende der 2 Linien, die eine senkrecht, die andre horizontal. Das sind die 2 Factoren.

Den einen derselben nennt man auch den Multiplicand, den andern den Multiplicator.

§. 23. Um es recht sinnlich darzustellen, wie ein Product erzeugt werde, zeichne man ein Rechtek von Punkten.

* * * * Horizontal sind 4 Punkte
* * * * Senkrecht sind 3 Punkte.
* * * *

Man kann die horizontale Reihe als den einen Factor ansehen, die senkrechte als den andern, und den Betrag der Punkte in dem ganzen Rechtek, als das Product.

Die Einheiten der senkrechten Reihe
zeigen an, wie viel mal
die horizontale Reihe zu setzen sei;
d. i. wie oft die 4 Einheiten zu wiederholen seien, um das ganze Rechtek zu bilden. Zum Anfang ist gleichsam nur die Vorstellung gegeben;

* * * *

Die Punkte des ganzen Rechteks müssen die senkrechte Reihe (3) so oft enthalten, so oft die horizontale Reihe Eins, oder einen Punkt, enthält. In diesem Fall enthält das ganze Rechtek die senkrechte Reihe viermal; und eben soviel Punkte oder Einheiten enthält auch die horizontale Reihe.

Ohne dieses Bild läuft die allgemeine Behauptung eben darauf hinaus:

„Eins muß eben so vielmal in dem einen „Factor liegen, als der andre Factor in der Zahl „des Products liegt.

Wenn man die Lehre von Proportionen gefaßt hat, so erhält man noch genügendere Einsicht über die Erzeugung dessen, was Product heißt. Diese Lehre kann aber erst weiter unten (im VII. Abschnitt) vorgetragen werden.

§. 24. Förmlich wird auf folgende Art multiplicirt:

Man sezt die 2 Factoren senkrecht unter einander, und ihr Product eben so, nachdem ein Strich gezogen worden:

8	Multiplicand	} die Factoren
3	Multiplicator	} die Factoren
24	Product	

Wenn die Factoren unter 10 sind, so giebt die Pythagorische Tafel das Product allemal selbst an.

Geht

Geht aber der eine Factor über 10, so verfahre man so:

Gesezt, es wäre vorgelegt:

28 so denke man 20 + 8
3 zuerst: 3 3

und spreche 3 mal 8 ist 24; und 3 mal 20 ist 60. Das Product muß also 24 + 60, das ist 84, betragen. Kürzer aber schreibt man die 2 Multipla so:

28 Und noch kürzer, schreibt 28
3 man die Zifer 2 in 24 3
24 gar nicht, sondern behält 84
addirt: 60 sie für die folgende Zifer, in der kürzesten Vorstellung.
Prod. 84 hier für 6, auf. Daher

Daß in der Addition 24 und 24 gleich-
60 6
viel ausgeben, sieht jeder ein; sieht also auch ein, daß die Nulle im Schreiben wegbleiben kann. Anfänger können sie immer einige Zeit schreiben, und es ist gar nicht räthlich, daß man ihnen immer nur befehlweise aufgebe: mit dem Sechser zu rücken. Sie werden es freilich befolgen, aber nicht wissen, warum? oder werden es schnell vergessen, wenn man es ihnen nur vorübergehend mit ein paar Worten erklärt, und sie nicht selbst Hand anlegen läßt.

Führt man sie aber hiezu an, so wird es ihnen gewiß bald selbst einleuchten, daß z. B.

785	soviel	785	und	785	
9	sey,	9	endlich	9	
45	als:	45	soviel	7065	
720		72	als:		
6300		63			

Wenn sie so allmälich geleitet werden, so werden sie die Sprache der mechanischen Regel bald verstehen:

„Fünfmal 9 ist 45; schreibe 5 unter; behalte 4.
„Achtmal 9 ist 72; schreibe nicht 2, sondern 6 wegen der behaltenen 4; und behalte nun 7.
„Siebenmal 9 ist 63; wegen der behaltenen 7, schreibe 70.

§. 25. Erstrekt sich der Multiplicator über die Zahl 9, so nehme man zuerst die einfachsten Fälle; Er sei 10. Aus der Pythagor. Tafel ist bekanut, daß 2 mal 10 = 20; und 10 mal 10 = 100 gelte, und so geschrieben werden. Gleichförmig wird 10 mal 20 durch 200; 10 mal 30 durch 300 u. s. w. ausgedrükt. Man versteht also wohl, wie

60	und auch	600	herauskomme.
10		10	
600		6000	

weil

weil 10 mal 100 gewiß 1000, ausmacht; und 10 mal 600 ſechsmal ſo viel, d. i. 6000 betragen muß.

Nun ſchreite man weiter, und nehme die Frage vor, wie wird 28 mit 10 multiplicirt?

Der Anfänger ſetze zuerſt aus

28 iſt 20 + 8
10 10 + 10
200 + 80 d. i. 280.

Die Ziffern des Multiplicanden erhalten alſo am Ende da wieder blos den Zuſaz einer Nulle, um das Zehnfache darzuſtellen. Eben ſo erſchien ja aber auch das Product von

10 und von 100
10 10
100 1000

Man hat daher bald wahrgenommen, daß, ſo oft ein Factor von 10, oder von 100, oder von 1000 vorkomme, die Multiplications-Sätze ſich ſehr abkürzen laſſen, und zwar ſämmtlich durch Stellung der Ziffern, wie hier in Beiſpielen angegeben werden ſoll:

28	60	184	63
10	10	20	300
280;	600;	3680;	18900.

So bald man diese Darstellungen wohl gefaßt hat, kann man zu zusammengesezteren Multiplicationen fortschreiten.

Wenn vorgegeben wird:

2	8	so denke man	2	8	+	2	8
2	3	zuerst		2	0		3
			5	6	0	+	8 4

Diese 2 Grösen ergeben sich auch, wenn man so untersezt:

	2	8	Eben so			7	8	5
	2	3	wird:				3	9
	8	4			7	0	6	5
5	6	0		2	3	5	5	0
6	4	4		3	0	6	1	5

Auch hier wird man die o in 560 und in 23550 am Ende weglassen können, aus der S. 50 bemerkten Ursache. Nur Anfänger müssen merken, daß, und warum sie an die Schluß-Zifern, die eingerükt stehen, hinzuzudenken seien.

Kommen in der Mitte zweier Zahl-Zifern in dem Multiplicator Nullen vor, so rükt man im Untersezen, wie hier zu sehen ist, das folgende Product zurük.

```
  268
  103
 ----
  804
 268
 ----
27604
```

Die Ursache ist, weil eigentlich zu setzen wäre:

```
  804
  000
 268
 ----
27604.
```

Die 3 Nullen kommen natürlich daher, weil 268, Nullmal genommen, = 0 beträgt.*) Die Reihe Nullen werden alsdenn, der Abkürzung wegen, weggelassen, doch muß ihr Daseyn durch Einrükkung des nächstfolgenden Products immer noch angezeigt werden; und dieses kann auch schon darum nicht weiter gegen die rechte Hand hin gerükt, stehen, weil eigentlich nach der Zifer 8 (in 268) noch zwei Nullen stehen sollten, nehmlich 26800. Denn der Factor 103 ist ja immer = 100 + 3 zu denken, und also 100 der lezte Factor. Aber 100 mal 268 ist 26800.

*) Anfänger machen manchmal dagegen Einwendungen, und meinen, z. B. 8 Nullmal genommen, könnte wol 8 selbst wieder seyn. Sie müssen erwägen, daß, 8 einmal genommen = 8 ist; und an die Erklärung des Products denken. Dieß soll eine Gröse seyn, die den einen Factor so oft in sich enthält, als die andre Einheiten hat. Wenn aber die andre nun gar keine Einheiten hat, so muß das Product doch wohl nichts enthalten, d. i. es muß = 0 seyn.

§. 26. Das allgemeine Zeichen der Multiplication ist sehr einfach; es ist ein Punkt.

Man schreibt:

$$2 . 3 = 6; \quad 3 . 7 = 21$$

und spricht aus: 2 mal 3 ist 6; 3 mal 7 ist 21.

Ehedem sezte man auch dafür ein liegendes Kreuz, etwa so:

$$2 \times 3 = 6; \quad 27 \times 29 = 783.$$

Der Punkt ist gewöhnlicher. Wo er steht, kann man im Lesen das Wort mal aussprechen. *)

Hiebei müssen sogleich folgende Bemerkungen ja nicht ausser Acht gelassen werden.

Zu jeder Gröse läßt sich 1, als Factor, denken; der Zahlwehrt der Gröse wird aber dadurch nicht geändert. Z. B. 1.6 oder 6.1 ist = 6 selbst, und nicht mehr. Denn 1 Geldstük sechsmal gezählt, giebt natürlich die Vervielfältigung = 6 aus.

Auch von conträren Annahmen wird man darauf geführt; z. B. 6 Geldstücke liegen beisam-

*) Es ist ganz einerlei, welcher Factor zuerst gesezt werde. Denn 2 mal 3 ist ja gewiß so viel, als 3 mal 2. Daher auch $2.3 = 3.2$; und ebendaher 29.27 ist $= 27.29$.

sammen; denkst du dir diese dreifach, so wäre da 6.3 vorhanden.
denke sie dir doppelt, so wäre = 6.2 vorhanden.
denke sie dir einfach, oder einmal, so kann ja gar nicht anders, als: = 6.1 geschrieben werden.
Denke sie dir gar weg, so ist das = 6.0.

Das ist ja nicht 60 zu lesen, sondern 6 Null mal, welches eben = 0 ist, und mit dem was auf vorigem Blatt gezeigt worden, übereinkommt.

In gewissen Verbindungen und Beweisen kommen diese Bezeichnungen oft vor; und sie sind wohl zu behalten, damit ja nicht Mißverstand zu irrigen Schlüssen verleite, wenn z. B. 6.1 für 61 angesehen würde.

Ferner merke man sich die nächstfolgende Darstellungs-Art:

Wenn zwei verschiedene Zahlen, beede durch eine dritte, multiplicirt werden sollen, so wirft man sie in eine Klammer zusammen, und schreibt den Factor nur einmal hinter die Klammer. Z. B.

$3.16 + 7.16 = 160$, schreibt man
$(3 + 7).16 = 160.$

Das ist der Fall, wenn die 2 Zahlen eine

Summe miteinander ausmachen können. Gehören sie aber als eine Differenz zusammen, z. B. 7 und 3 kämen in folgender Verbindung vor: $7.16 - 3.16$; so schriebe man wieder in Abkürzung $(7 - 3).16 = 64$.

Ebenso kann vorkommen:

$$(36 + 19 - 14).13 = 533.$$

Jedesmal ist der Factor hinter der Klammer hiebei auf alle die Grösen einzeln zu beziehen, welche innerhalb der Klammer stehen, gleich als ob ausgesezt stünde:

$$36.13 + 19.13 - 14.13 = 533$$

Denn $715 - 182$ ist so viel, als $(55 - 14).13$; oder so viel, als 533; wie gewiß jeder vermittelst leichter Nachrechnung sich überzeugen kann. Durch das Zusammenordnen in Klammern erspart man aber viele Zifern, wie in die Augen fällt.

Anfänger übersehen die Vortheile dieser angegebenen Bezeichnungs-Weisen nicht wohl unmittelbar deutlich, und können auch über deren Nüzlichkeit nicht hier sogleich zur Genüge belehrt werden. Sie mögen indessen die Versicherung annehmen, daß dieselbe sehr klug ausgedacht seien, und insbesondre in Verbindung mit den Signaturen der Division zu Abkürzung unsäglicher Auflösungen aufs beste dienen. Unter anderm wird ihnen bald einleuchten,

leuchten, daß insbesondre in jedem Fall, da zwar das Produkt, und einer der Factoren, die es ausmachen, bekannt ist, der andre Factor aber nicht, keine schiklichere Signatur sich gedenken lasse, als z. B. in den folgenden Sätzen: $12.x = 168$; oder $21.y = 294$. Man spricht dieselbe aus: 12 mal x ist dem Product 168 gleich; und 21 mal y ist dem Product 294 gleich, wo x und y unbekannte Grösen vorstellen, die jedoch durch einen gar leichten Kunstgriff bekannt werden können.

Wie gar oft solche Fälle wirklich vorkommen, wird sich in kurzem sehr klar darlegen. Von mehr zusammengesezten Sätzen kann selbst alle Erwähnung gegenwärtig noch ausgesezt bleiben. *)

*) Von Proben über geführte Multiplicationen ist in diesem Capitel nichts gelehrt worden. Unten in §. 31 wird bei der Angabe, wie Divisionen zu prüfen seien, das gehörige noch beigebracht werden.

V. Abschnitt.

Vom Dividiren

mit ganzen Zahlen.

§. 27.

Man kann jede Zahl theilen, das ist, in kleinere Stücke, die da auch Zahlen sind, zerschlagen. Aber in gleiche Stücke kann man nicht jede Zahl zerschlagen, wenn die Stücke aus gleichartigen Einheiten bestehen sollen.

So läßt sich die Zahl 24 wohl in 6 gleiche Theile zerlegen, deren jeder 4 Einheiten enthält. Mit der Zahl 23 läßt sich dieß nicht bewerkstelligen.

Wenn 6 Personen 23 Geldstücke, welche ihnen zusammen zukommen, theilen wollen, so sehen sie wohl ein, daß 4 dieser Geldstücke nicht für jeden ausreichen, und daß, wenn jeder nur 3 zu sich nimmt, 5 einzelne Stücke noch übrig bleiben.

Die Kunst bei jeder vorgelegten Zahl, sie sei noch so gros, dieses bald einzusehen, wie viel nehmlich auf eine gewisse Anzahl theilender Personen, von der ganzen Zahl ausreichen? ob sich ganz gleiche Theile machen lassen, so

daß

daß nichts übrig bleibe? oder wie viel sich gleiche Theile machen lassen, daß doch am wenigsten (ungleich) übrig bleibe? — diese Kunst heißt dividiren.

Die vorgelegte ganze Zahl, in die sich etliche theilen wollen, heißt der Dividend.

Die Anzahl derer, welche theilen wollen, heißt der Divisor.

Die Zahl, welche gesucht und gefunden werden soll, (die die Grösse der Antheile anzeigt,) heißt der Quotient, auch die Quote.

Die nach angenommener Theilung am Ende von dem Dividenden übrig bleibende Zahl, welche nicht zu ganzer Vertheilung zureicht, heißt der Rest. Natürlich muß diese Zahl allemal kleiner, als die vorhandene Anzahl der Theiler seyn; denn wäre sie dieser Anzahl gleich, so erhielte doch jeder der Theiler noch eins, d. i. jedem käme doch eine Einheit zu; Somit gienge die Theilung auf, und es bliebe kein Rest. In diesem Fall hätte sich der Dividend in vollkommen gleiche Theile theilen lassen, welches sich aber gar oft nicht schicken will. Bei dem obigen Beispiel 24 hat es sich geschikt, bei 23, bei 31, bei 37 bleiben allemal Reste.

Um die Begriffe von Division, und was bei derselben vorausgesezt wird, wohl aus einander zu setzen, halte ich für räthlich, folgende Vorstellungen, die in einem besondern §. gesammelt werden sollen, zur Erwägung zu geben. Sollte es einigen jungen Lesern zu schwer fallen, sie sogleich zu fassen, so mögen dieselben zu dem folgenden §. 29 fortgehen. Es wird sie aber gewiß nicht gereuen, wenn sie mit einiger Anstrengung die allgemeinen Darstellungen des nächsten §. überzeugend einzusehen sich bemühen. Es wird niches dabei gelehrt, wozu nicht die Anleitung schon in den vorhergehenden Abschnitten gegeben wäre, und die Gründe sind sehr einfach, auf welchen die Belehrung, die der Folge wegen doch sehr wichtig ist, beruhet.

§. 28. Jede Zahl läßt sich als eine Summe zweier ganzen Zahlen denken; das ist oben schon vorgekommen. Aber ein Multiplum zweier ganzen Zahlen, ist nicht jede ganze Zahl. Z. B. es giebt keine zwei ganze Zahlen, deren Multiplum 37 wäre; keine, deren Multiplum 41 wäre. Offenbar aber läßt sich 37 doch zum Theil, als ein Multiplum vorstellen. Nehmlich man kann setzen:

2.18 + 1 (oder 36 + 1) ist = 37.
Ferner: 3.12 + 1 ebenso
4. 9 + 1 ebenso
5. 7 + 2 oder 35 + 2 ist auch = 37
8. 4 + 5 oder 32 + 5 ebenfalls.

Der Anhang mit +1, +2, +5 zeigt jedesmal einen Ueberschuß über ein vollkommnes Multiplum an; als: 5 mal 7 ist das Multiplum, und 2 dazu der Ueberschuß; In Beziehung auf die Haupt-Zahl 37 aber kann und muß man allerdings diesen Anhang eine Ergänzung heissen.

Ebenso bei 41 wäre in 3.13+2, das Multiplum 3 mal 13; das ist 39; und 2 dazu die Ergänzung, um die Zahl 41 voll zu machen.

Gesezt aber nun weiter, man kennte von dem Saz:

3.13+2 = 41, die Zahlen 13 und 2 noch nicht, oder sie lägen verdekt, stünden etwa so: 3.x + y = 41; so fragt sich, giebt es ein Verfahren, aus den gegebenen zwei Zahlen 41 und 3 (dem Factor zu x) die unbekannte Zahl x, und die Ergänzungs Zahl y zu finden? Allerdings giebt es ein solches Verfahren und dasselbe nennt man: dividiren. Mit der Zahl 41 muß eine Division durch die Zahl 3 vorgenommen werden; und am Ende der Operation

muß

muß 13+2 herauskommen, so daß man sieht, wie viel mal liegt 3 in 41? und wie heißt die Ergänzung, oder die Zahl über das gröste Multiplum, das an 41 zunächst hinreicht, wenn 3 der eine der Factoren dazu ist?

Diese Ergänzung muß nicht allemal vorhanden seyn: die formale Gröse y kann also wohl = o seyn. Z. B. wenn gesezt würde, allgemein:

$$3.x + y = 39$$

So ließe sich gar nichts anders in Zahlen untersezen, als

$$\left.\begin{matrix} 3.x+0 \\ 3.13+0 \end{matrix}\right\} = 39$$

weil 3 mal 13 für sich schon 39 ausmacht, und dabei gar keine Ergänzung über das vorhandene Multiplum mehr statt findet.

Anfänger müssen bei Zeiten mit dem Saz vertraut gemacht werden, daß allgemeine Signaturen, (x oder y) durchaus jede Gröse vorstellen können, und so gar o; und daß es auf die Verbindung, in der sie stehen, ankommt, was für eine Bedeutung sie haben können. Wenn keine Ergänzung, kein Rest bei einer Division vorhanden ist, ist allemal y = o, und die zwei Factoren, (wie 3.x, oder 4.x, oder 5.x u. s. f.) machen allein ohne Anhang den Dividenden schon aus, weil ja 3.x + o

ge-

wiß so viel, als 3.x selbst ist; (In Concreto 3.13+0 gilt natürlich = 3.13 selbst.)

In der Folge wird wohl hievon Gebrauch gemacht werden, welchen freilich der Anfänger hier noch nicht vermuthen kann.

§. 29. Wie man nun am bequemsten zurecht komme, um vorgegebene große oder kleine Dividenden wirklich zu theilen, soll jezt erklärt werden:

Die einfachste Art zu dividiren, kommt beim Halbiren vor. Wenn 642 unter 2 getheilt werden soll, so ist das Geschäft bald berichtigt. Die Helfte von 642 ist 321. Dabei kann man Zifer für Zifer vornehmen, und direct von jeder die Helfte setzen. Doch muß man auch hier sich wieder erinnern, daß der Divisor 2, eigentlich successiv aus 600+40+2 ausgebe: 300+20+1; welches in Kürze zusammengezogen, freilich 321 beträgt. Der Nutzen dieser Auseinandersetzung ergiebt sich sogleich bei dem nächsten Fall:

Gesezt; es käme (anstatt 642) als Dividend 612 vor, so kann der Anfänger wirklich anstehen, wie er fortfahren soll, wenn er spricht: 2 liegt in 6 wol 3 mal; aber darauf in 1?... Wie soll er da setzen? Er schreib nur statt 612 ganz aus:

600

600 + 10 + 2; und halbire aldenn:
300 + 5 + 1; das ist: 300 + 6 oder 306
so wird er wohl sehen, wie er in Zukunft kürzer sich benehmen könne; wird aber zugleich erkennen, woher es komme, daß er im Quotienten die 2te Ziffer schlechthin o einschreiben dürfe, und daß in solchen Fällen die Ziffer, welche keine Division zugelassen, allemal auf die nächstfolgende übergetragen werden müsse.

Aber auch bei folgenden Fällen wird ihm die Auseinandersetzung in Glieder bald das gehörige Licht verschaffen, wenn z. B. aufgegeben wird: 548 als Dividend, und 2 als Divisor. Er setze:

500 + 40 + 8; Eben so viel ist.
400 + 140 + 8

Unläugbar wird die Halbirung nach dieser Umbildung von Glied zu Glied spielend leicht, die Helften sind 200 + 70 + 4; das ist zusammen 274.

In diesem Beispiel war 5 (um 1) zu gros, bei einer geforderten Division; in dem vorigen war 1 zu klein. Nun wird der Anfänger einsehen, wie er wohl in beeden Fällen in Abkürzung verfahren dürfe, und worauf sich die Regeln zum Mechanismus der Division gründen, welche z. B. so vorgetragen zu werden pflegen:

„Wenn

„Wenn der Dividend „ist 76514; der Divisor 3; „so setze, wie darneben „steht, und sprich: 3 in 7 „liegt 2 mal; aber 1 bleibt „übrig; setze 2 hinter den „lezten Scheide-Strich; „und spreche: 2 mal 3 „giebt 6; bleibt 1; Schrei„be die 6 unter 7; und „den Rest (1) unter einen „Strich senkrecht. Alsdenn gehe zur 2ten „Division fort:

3 | 76514 | 25504
6
16
15
15
014
12
2

„Dazu aber must du die 2te Zifer in dem „Dividenden herunter setzen, neben den Rest 1. „Also kommt die Zahl 16; darein soll nun 3 „dividiren. Sprich wieder 3 in 16 giebt 5; „3 mal 5 ist 15; rest 1. Schreibe 5 in den „Quotienten neben 2; aber 15 schreibe unter „16; ziehe ab, Rest wieder 1. Alsdenn tritt „die dritte Division ein. Dabei bleibt ein„mal kein Rest. Denn 3 mal 15 ist eben un„ter dem Strich vorhanden. Der Abzug giebt „daher unter einem neuen Strich 0.

„Nun gehts an die 4te Division. Da „ist aber nur 1 als Dividend vorhanden. „Sprich 3 in 1 geht nicht. Es muß daher 0 „in den Quotienten gesezt werden. Nimm „aber nun weiter oben von dem Dividenden „4 herab zu 1; und dividire alsdenn: 3 in 14

„giebt 4. Daher 3 mal 4 zum Abzug 12 giebt.
„Ziehe ab: 12 von 14; Rest 2.

Anstatt einen weitern Commentar über diese Vorschriften zu liefern, mache ich blos die Bemerkung, daß Anfänger mit Nutzen auch diesen Dividend in Theile zerschlagen, und erwägen, wie sich alsdenn die Glieder wol am schiklichsten umbilden lassen werden, um die Division mit 3 bequem durchzuführen. Man sehe einmal: 76514 ist so viel als:

$$70000 + 6000 + 500 + 10 + 4$$

Umgebildet ist ebensoviel:

$$60000 + 15000 + 1500 + 12 + 2$$

Hier sind lauter vollkommne Multipla von 3; bis auf die lezte Zahl 2, welche den Rest giebt (und auch gegeben haben würde, wenn man die Umbildung von 14 in $9 + 5$ angenommen hätte.) Der Quotient ist nun allerdings, bei dem Divisor 3, folgender:

$$20000 + 5000 + 500 + 4 \left(+\tfrac{2}{3}\right)$$

Der Rest ist 2, durch 3 dividirt. Was man dabei bestimmt zu denken habe, kann erst in den folgenden Abschnitten, wo die Lehre von Brüchen abgehandelt wird, hinlänglich erklärt werden. Der Quotient mit ganzen Zahlen ist offenbar ohne die Plus Zeichen, gehörig zusammen gezogen = 25504; wobei der Rest weggeblieben ist. Wie die Nulle zwischen 5 und 4 zu stehen komme, sieht man ganz deutlich,

lich, wenn man die Glieder senkrecht übereinander sezt, und alsdenn addirt:

20000
5000
500
4

Summe: 25504

Mit andern Zahlen, die Divisoren sind, verhält sichs nun eben so. Blos noch ein Beispiel mag deshalb hier stehen:

9 | 765297 | 85033.
72
45
45
29
27
27
27
0

Man bemerke, wie überall die nächste Multipla gesucht werden; als bei 76 wird 8.9, das ist 72 gesucht; bei 29 wird 3.9 = 27 gesucht.

Auch dieses Beispiel werde in folgende Form ausgesezt:

760000 + 5000 + 200 + 90 + 7
720000 + 45000 + 0 + 270 + 27
80000 + 5000 + 0 + 30 + 3

Das 3te und 4te Glied hätte sich auch beim ersten Niederschreiben sogleich in eines zusammen ziehen lassen.

§. 30. Wenn der Divisor über 9 beträgt, so wird die Division beschwerlicher. Sie würde es nicht werden, wenn wir von Jugend auf zu grössern Tabellen, welche das Einmal eins bis 100 enthielten, versehen wären, und gewöhnt würden, daraus die Multipla zu nehmen. In einigen Rechenbüchern sind solche erweiterte Tafeln enthalten; allein sie sind selten, und wegen der mehrern Blätter, die sie einnehmen, freilich niemals so leicht zu übersehen, wie die kleinern.

Man behilft sich deshalb mit den kleinern Multiplis, und verfährt bei Divisoren mit 2 Zahlen, wie folgt:

Man vergleicht die 2 Zifern des Divisors mit den zwei ersten des Dividendus. Giebt die Vergleichung nicht bequem an, welches Multiplum des Divisors dem Betrag der 2 Zifern im Dividendus gleich, oder am nächsten komme, so sieht man nur auf die erste vorderste Zifer im Divisor, und im Dividend, nnd verfährt, gleich als ob der ganze Divisor eben so vielmal in den 2 Zifern des Dividends läge, als die erste Zifer des Divisors in der ersten Zifer des Dividends. Damit kann man öfters anstosen, und etwas annehmen, das nicht statt haben kann. Allein der Verfolg entdekt sogleich die Unrichtigkeit der gedachten Annahme. Denn, wenn sie unstatthaft ist, so wird die Multiplication gar bald ein Product darstellen, das

gröſſer als der vorhandene Minuend, ſeyn wird. Man wird damit nothwendig zurecht gewieſen, die angenommene Zifer im Quotienten um 1; (auch wohl manchmal um 2) zu vermindern, bis der Abzug wirklich angeht. Geht er an, ſo ſezt man das Geſchäft fort, ganz gleichförmig, wie im vorigen §. gelehrt worden.

Hat der Diviſor 3 Zifern, ſo beſteht die nehmliche Regel, das Geſchäft wird aber immer beſchwerlicher, ſo wie der Theiler zunimmt.

Man ſehe folgende Beiſpiele durch:

24 | 38567 | 1606

24

145

144

167

144

23

Da laſſen ſich 24 mit 38 gar leicht vergleichen. Aber 24 mit 145 führen ſchon auf ungewiſſe Verſuche. Sieht man alsdenn auf die erſte Zifern, und denkt: 2 in 14, könnte wohl 7 in den Quotienten geben; ſo wird der Verfolg ſogleich zeigen, daß 7.24 = 168 ein zu groſes Product zum Abzug gäbe. Daher nimmt man 6.

Auch dieſes Beiſpiel mag wieder in Glieder ausgeſezt werden: Der erſte Saz iſt

38000 +	500 +	67	Dafür schreibe:
24000 +	14500 +	67.	Nochmals umgebildet aber:
.... +	14400 +	167.	
....	+	144+23.	Nun folgt die Division selbst.
1000 +	600 +	6 +	(Plus d. Rest.)

Besteht der Divisor aus 3 Ziffern, so ist es durchgehends räthlich, ehe man das Divisions-Geschäft selbst anfängt, sich die Multipla des Divisors von 2 bis 9 zur Seite zu legen; z. B. wenn der Divisor 243 hiesse, so berechnet man zuvörderst:

1) 243	4) 972	7) 1701
2) 486	5) 1215	8) 1944
3) 729	6) 1458	9) 2187.

Alsdenn kann man in der Wahl der Ziffern für den Quotienten niemals fehlen. Man sieht sogleich, was sich subtrahiren läßt, und schreibt gleichsam nur ab.

§. 31. Die Probe nach vollendetem Divisionsgeschäft wird so geführt:

Man multiplicirt den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor. Das Product wird den Dividenden ganz darstellen, wenn bei der Division am Ende kein Rest geblieben ist. Ist ein Rest geblieben, so addire man nur diesen zu dem

dem gedachten Product; so muß wieder der ganze Dividend erscheinen.

Beispiel: 3 | 41 | 13 Nun 13 Quotient
39 3 Divisor
Rest: 2 39
+ 2
41 ist der Divid.

In dem Beispiel S. 67 blieb kein Rest, daher 3 mal 85033 vollkommen den Dividenden wieder giebt = 765297. Warum dieses so zutreffen muß, sieht jeder ein, der bedenkt, daß Division nur ein vorhandnes Multiplum zerlegt, und in dem Quotienten allemal blos angezeigt wird, wie oft der Divisor in dem Dividenden enthalten sei.

So wie man den Dividenden 765297 sich in 2 Factoren = 9.85033 zu denken hat, so hat man sich jeden andern Dividenden zu denken, nur, daß so lange der Quotient noch unbekannt (noch nicht ausgerechnet) ist, sein Betrag allgemein x oder q heissen mag. Also wäre hier 9.x oder 9.q = 765297.

In einem andern Fall wäre für 2.321 = 642 zu setzen 2.q = 642; und da bestünde der Divisor dann wieder aus 2 Factoren. So verhält sichs nun allemal; auch bei den grösten Zahlen. Offenbar kann man demnach eine und ebendieselbe Zahl bald als Product, bald als Dividend ansehen.

Deshalb geben sich aber auch Multiplication und Division wechselseitige Proben. Wenn man wissen will, ob man beim Multipliciren bis ans Ende richtig verfahren sei, so darf man nur das erhaltene Product durch den einen der 2 Factoren wieder dividiren; der Quotient, der herauskommt, muß dem andern Factor gleich seyn. So gab die Multiplication (oben S. 50) von 785 durch 39 das Product 30615. Ob dieselbe Angabe gegründet sei, ergiebt sich, wenn man 30615 durch 39 dividirt. Man erhält den Quotienten 785 vollkommen wieder. Denn es ist

```
39 | 30615 | 785
   273
   ---
    331
    312
    ---
     195
     195
     ---
       0
```

Auch kommt man der Ueberzeugung in diesem Fall gleichfalls wieder sehr zu Hülfe, wenn man abermals ausezt:

```
                30000 +      600  + 15  =
So viel als:    27300 + (2700 + 600) + 15
                .... +      3300  + 15
                .... +      3120  + (180 + 15)
Nun zusammen:   27300 +      3120  + 195
Das ist: = 700.39 +          80.39 + 5.39.
```

Wenn

Wenn man Multipla für 39 von 2 bis 9 sich ausgeschrieben hat, bedarf es der vielen Zahlen nicht. Sie sind hier nun für Anfänger so auseinander gesezt, um sie in den Zerlegungen zu üben, welche in §. 29 empfohlen worden sind.

§. 32. Mit benannten Zahlen zu dividiren, und zu multipliciren, wird zwar in vielen Rechenbüchern gelehrt, ehe man die zweilezte Capitel verläßt. Allein alle Beispiele, welche dabei gegeben werden, laufen auf verdekte Proportionen oder auf sogenannte Regel de Tri Sätze hinaus, und können erst mit hinlänglichen Erläuterungen beleuchtet werden, wenn die Lehren von Verhältnissen und Proportionen beigebracht sind. Die Kenntnisse hievon geben überhaupt erst über einige Hauptgründe der Multiplication, und der Division ganz genügenden Aufschluß, und es ist vergebliche Mühe, wenn man diese so betittelte Species allein und abgesondert, für sich, recht umständlich durchgearbeitet, vorzutragen sich bemüht. Die Folge wird zeigen, wie unmethodisch es wäre, hierher zu ziehen, was auf Sätzen beruht, die erst in den nächsten Abschnitten erläutert werden können.

§. 33. Das allgemeine Zeichen der Multiplication ist, wie wir aus §. 26 wissen, ein Punkt zwischen den Factoren. Das allge-

meine Zeichen der Division besteht in zwei Punkten, welche zwischen den Dividend und den Divisor gesezt werden. Z. B. (36:4) = 9; wird ausgesprochen: 36 durch 9 dividirt, ist 9. Anstatt der Punkte legt man aber öfters einen Strich zwischen eben die zwei Zahlen, wie folgt:

$\frac{36}{4}$ = (36:4); Auch $\frac{41}{3}$ ist = (41:3)

Man muß beede Darstellungen wohl behalten, weil sie beede bis izt fast in gleicher Uebung sind.

Hiebei kann man auch sogleich merken, daß

$\frac{41}{3}$ auch $\frac{39+2}{3}$; und auch $\frac{39}{3}+\frac{2}{3}$ gleich

sei, und daß jeder Quotient, wenn (über dem Strich) der Dividend als die Summe zweier Zahlen geschrieben vorkommt, auch in zwei Quotienten zerlegt werden könne. Gewiß ist $\frac{12+24}{3}$ so viel, als $\frac{12}{3}+\frac{24}{3}$ d. i. (36:3) oder der Zahl 12 gleich.

Was man sich unter den Quotienten zu denken habe, bei welchen der Dividend (über dem Strich) eine kleinere Zahl ist, als der Divisor, (wie bei $\frac{2}{3}$) dieses soll sogleich in den folgenden Abschnitten deutlich gezeigt werden.

VI. Abschnitt.

Von Zahlen-Brüchen.

§. 34.

Jede Gröse kann man sich als zusammengesezt vorstellen. Die Vielheit ihrer Theile macht ein Ganzes aus. Dieses Ganze kann der Mensch als Eins denken.

Liegen etliche Haufen Körner oder Kugeln vor dir, und du weißt irgendwoher, daß sie alle gleich gros sind, daß jeder gleich viel Körner oder Kugeln enthält, so kannst du jeden Hauffen, als Eins dir herausdenken; d. i. als eine Einheit. Sie ist aus Theilen zusammengesezt von bestimmter Menge, oder Vielheit.

Nimmst du etliche dieser Theile weg, so sonderst du

ein Fragment von der Einheit,

Fragment heißt in deutscher Sprache, ein abgebrochenes Stück, ein Bruch.

Geschieht die Absonderung gerade zur Helfte, so wird der Bruch in Zahlenbezeichnung mit $\frac{1}{2}$ dargestellt.

Vorher war der Haufen = 1. Jezt ist er = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Wird der Haufen in 3 Theile getheilt, so ist

ist jeder Theil $= \frac{1}{3}$; das ist die Einheit, dividirt durch 3.

Auf diesem Weg versteht man, was $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; u. s. f. bedeute; Auch, wenn kleine Theile gemacht werden, was $\frac{1}{100}$, was $\frac{1}{1000}$ bedeute; sieht auch damit ein, daß der Gehalt des ganzen Bruchs abnehme, so wie die Zahl unter dem Strich zunimmt.

Ueber dem Strich kommt in den bis hieher angeführten Brüchen immer 1 vor; aber dieß muß nicht bei jedem Bruch seyn.

Gesezt: der Haufe Körner wäre in 5 Theile getheilt: so sind das fünf $\frac{1}{5}$tel; Nähmest du hievon nicht blos $\frac{1}{5}$ weg, sondern zwei mal $\frac{1}{5}$ oder zwei Fünftel, so wird dieser Betrag des ganzen anstatt $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ geschrieben: $\frac{2}{5}$. Hierauf folgen

$\frac{3}{5}$ d. i. drei Fünftel.
$\frac{4}{5}$ d. i. vier Fünftel.
$\frac{5}{5}$ d. i. fünf Fünftel; oder die Einheit selbst.

Es kostet nun nicht viel Mühe einzusehen, daß die Zifer unterhalb des Strichs blos anzeige, welche Theilung der Einheit in jedem Fall zu denken sei, welche Absonderung in wie viel Stücke. Daher heißt auch diese Zifer

der Nenner, Denominator.

Die Zifer über dem Strich aber giebt an, was von der bestimmten Vielheit der Theile für

dieß:

dießmal genommen werde; sie zählt gleichsam diese Theile her, (sagt: in Concreto sinds 3, oder 4, oder 5). Deshalb heißt dann diese Zifer der Zähler; Numerator.

§. 35. Aus dem, was eben angegeben worden, erhellet, daß man jeden Bruch, in zwei Factoren zerlegt schreiben könne. Nehmlich $\frac{2}{5}$ ist gewiß so viel als 2 mal $\frac{1}{5}$tel. Also ist auch $\frac{2}{5} = 2 . \frac{1}{5}$ nach §. 26, wo das Zeichen der Multiplication selbst erklärt worden.

Ebendaher ist $\frac{3}{5} = 3 . \frac{1}{5}$; das ist; Ein Fünftel 3 mal genommen *).

Daher auch $\frac{5}{5} = 5 . \frac{1}{5}$. Das ist = 1 selbst.

Desgleichen $\frac{1}{12}$ ist $= 11 . \frac{1}{12}$
und $\frac{1}{12}$ ist $= 12 . \frac{1}{12}$. Das ist = 1.

Denn wenn du den Haufen Körner, in Zwölftel zerlegt, vor dir liegen hast, und du nimmst alle zwölf, so hast du gewiß die ganze Einheit selbst: Mit andern Worten: Du hast ein Zwölftel (oder den Betrag eines Zwölftels) 12mal genommen ($\frac{1}{12} . 12$;) welches soviel, als $\frac{1.12}{12}$ d. i. $\frac{12}{12}$ ist.

Diese Vorstellung ist sehr wichtig. Anfänger können es freylich nicht ahnden, wie viel

*) Auch ist $\frac{1}{5} = 1 . \frac{1}{5}$; d. i. ein Fünftel einmal genommen; und so allemal: $1 . \frac{1}{a}$ ist $= \frac{1}{a}$.

viel davon abhänge, daß sie diese Umbildung eines jeden Bruchs in 2 Factoren wohl fassen, und behalten: Sie werden aber bald sehen, wie oft sich hierauf bezogen werde.

§. 36. Aus dem vorhergehenden Blatt ist nun verständlich genug, was ein Bruch bedeute, dessen Zähler kleiner, als der Nenner, oder auch diesem gleich sei. Laßt uns nun weiter gehn, und auch einen Bruch uns denken, dessen Zähler gröser wäre, als der Nenner; z. B. $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{13}{12}$ u. dergl.

Was stellt man sich dabei vor? Die Einheit und ein Fragment dazu. Denn man erwäge nur, daß z. B. bei $\frac{6}{5}$, es ganz ebenso viel bedeute, wenn man dafür sezt:

$$\frac{5+1}{5} \text{ das ist: } (\tfrac{5}{5} + \tfrac{1}{5})$$

welches nach den Erläuterungen des §. 33 gewiß statthaft ist. Allein $\frac{5}{5}$ ist doch allerdings $= 1$; und deshalb ist natürlich

$$\tfrac{5}{5} + \tfrac{1}{5} = 1 + \tfrac{1}{5}$$

Auch muß dem also seyn, weil $\frac{6}{5}$ so viel als 6 mal $\frac{1}{5}$ ist, d. ist $6 \cdot \frac{1}{5}$ (dem vorhergehenden §. gemäß. *) Sechsmal ist aber gewiß fünfmal und einmal dazu; welches eben 1 und $\frac{1}{5}$ wieder ausgiebt.

Man

*) $6 \cdot \frac{1}{5}$ ist auch $\frac{6 \cdot 1}{5}$; weil $6 \cdot 1 = 6$ ist. So läßt sich jeder Factor zu einem Bruch über den Strich neben den Zähler sezen.

Man nennt Brüche, deren Zähler so beschaffen, (grösser, als deren Nenner) sind uneigentliche Brüche; (fractiones spuriæ) unächte, Bastardbrüche;

Dagegen die, deren Zähler kleiner sind, eigentliche oder ächte Brüche heissen (fractiones veræ).

§. 37. Bei den unächten Brüchen kann man allemal dividiren, so daß der Zähler ganz und gar, das was wir im lezten Abschnitt, als den Dividend kennen gelernt haben, vorstellt, und der Nenner den Divisor.

Geht die Division ohne Rest zu Ende, so kann man jedesmal in einem solchen Bruch den Zähler durch 2 Factoren ausdrücken.

Z. B. $\frac{36}{4} = \frac{4 \cdot 9}{4}$; $\frac{42}{7} = \frac{6 \cdot 7}{7}$.

Geht aber die Division nicht auf, so kommt allemal hinter die 2 Factoren noch ein Anhang mit + in den Zähler.

Z. B. $\frac{41}{3}$ ist $= \frac{3 \cdot 13 + 2}{3}$; $\frac{59}{6}$ ist $= \frac{6 \cdot 9 + 5}{6}$

Man gebe sich selbst mehrere Beispiele für diese zwei verschiedene Fälle. Laßt uns jeden derselben noch besonders näher betrachten. Bei dem Isten wird man gar bald folgende doppelte Wahrnehmung machen:

1) Im Zähler steht allemal ein Factor, dessen Zahl der des Divisors gleich ist, wie in $\frac{4 \cdot 2}{4}$

2) Die

2) Die Geltung des Bruchs ist allemal einer ganzen Zahl gleich; und diese ganze Zahl ist eben der 2te Factor selbst; wie sie 9 ist in $\frac{4.9}{4}$; und 9 macht ja die wahre Geltung des ganzen unächten Bruchs aus.

Diese lezte (zweite) Wahrnehmung läßt sich aus der ersten selbst erklären; $\frac{36}{4}$ oder $\frac{4.9}{4}$ ist so viel als 9 mal $\frac{4}{4}$ oder $= 9.\frac{4}{4}$. Denn so wie $\frac{5}{5} = \frac{6.1}{5}$ und auch $6.\frac{1}{1}$ ist, (nach den zwei vorher. §.) ebenso ist gewiß auch $\frac{9.4}{4} = 9.\frac{4}{4}$. Aber $\frac{4}{4}$ ist eben 1. Deshalb denn $9.\frac{4}{4} = 9.1$ gelten muß. Weil nun 9.1 nicht mehr, als 9 selbst, nach §. 26, bedeutet, so ist $\frac{4.9}{4}$ allerdings der ganzen Zahl gleich.

Bei dem IIten Fall, wenn die Division nicht aufgeht, kommt man, wie gedacht, auf einen Anhang mit + in dem Zähler. Dieser Anhang ist nichts anders, als der Rest, dessen in §. 29 S. 66 erwähnt worden.

Er gehört zum Quotienten, und dieser ist niemals ganz richtig oder vollendet angegeben, wenn er wegbleibt. Er ist jedesmal ein ächter Bruch. Denn ohne Zweifel ist $\frac{41}{3}$ so viel, als $13+\frac{2}{3}$. Und daß dem so sei, sieht man klar ein, wenn man erkennt, daß zuerst für $\frac{41}{3}$ sich $\frac{39+2}{3}$, und dann $\frac{39}{3}+\frac{2}{3}$ schreiben lasse (den Angaben in §. 33 gemäs.) Von diesen zwei lezten Brüchen ist aber der

erste,

erste, $\frac{39}{3}$ einer ganzen Zahl gleich; darum, weil $39 = 3 \cdot 13$ beträgt, und $3 \cdot 13$, dividirt durch 3 so viel als $\frac{3}{3} \cdot 13$, d. i. $= 13$ allein ausmacht. (Siehe nur deshalb auf die vorige Seite, und auf §. 35 zurük.)

Eben deshalb ist $\frac{59}{6} = 9 + \frac{5}{6}$. Warum?

Darum, weil $\frac{59}{6} = \frac{6 \cdot 9 + 5}{6}$

und dieser lezte Bruch $= \frac{6 \cdot 9}{6} + \frac{5}{6}$

und diese zwei Brüche $= 9 + \frac{5}{6}$ sind.

Einsicht von diesen drei Sätzen und von der Rechtmäsigkeit dieser Umbildungen muß man also haben, um sich von der Schlußbezeichnung zu überzeugen. In den vorhergehenden §§hen liegen die Gründe zu allem, nehmlich in §. 26. 28. 33.

Eine Frage, welche wahrscheinlich vielen Lesern bei Durchgehung dieser Beispiele einfällt, soll sogleich in dem folgenden §. beantwortet werden.

§. 38. Wenn ein unächter Bruch vorkommt, zumal einer, in welchem der Zähler gros ist, wie kann man dann nur sogleich wissen, welche 2 Factoren über den Strich zu schreiben seien?

Z. B. bei $\frac{59}{6} = \frac{6 \cdot 9 + 5}{6}$; wie erräth man sogleich die 2 Factoren 6, 9, welche da vorne stehen?

Wenn der ganze Zähler unter Hundert beträgt, so kommt man hiebei mit einem Blik in das Einmal eins zurecht. Man sieht nur nach dem nächsten Multiplum von 6, das ein Product ist, welches zunächst unter der Zahl 59 liegt.

6 mal 9 ist 54
6 mal 10 ist 60.

Das Multiplum 6.10 liegt schon zu hoch; 54 aber ist das nächste. Also schreibt man hin 6.9; und alsdenn die Differenz von 54 auf 59, das ist + 5 dazu. Damit hat man den Betrag des ganzen Zählers 6.9 + 5; und kann also nun den Bruch, umgebildet, darstellen $\frac{6.9+5}{6}$; und alsdenn weiter leicht fortschliessen (wie auf der vorherg. Seite.)

Ist aber der Zähler grösser, als 100, so hat man ein erweitertes Einmal eins, oder auch so genannte Factoren-Tafeln nöthig. Gesezt, es käme der Bruch vor:

$\frac{281}{24}$; so ist derselbe $= \frac{24.11+3}{24}$

und dieses erfährt man aus einem großen Einmal eins, in welchem die Multipla über Zehn, also auch die von 24 leicht nachgeschlagen werden können. Da ersieht dann das Auge gar schnell, daß

24.11 = 264
und 24.12 = 288 sei;

Aber 288 steht um 7 höher, als der Zähler 281. Es muß daher blos 264 oder 24.11 über den Strich geschrieben werden, jedoch mit dem Anhang +17; weil erst (264+17) den Zähler 281 ganz ausmachen.

Wer viel rechnet, dem kommt ein solches großes Einmaleins sehr gut zu statten; und es ist Schade, daß wolfeile und correcte Ausgaben von dem grössern Abacus selten sind. In dicken Rechenbüchern sind wohl manchmal dergleichen eingerükt, aber einzeln sind sie mit Mühe zu bekommen. Ich besitze ein Werkchen von 1610, zu Strasburg in ganz kleinem länglichten Format gedrukt, dessen Titel nicht verräth, was es gerade enthält: Er heißt: Erfindung einer allgemeinen arithmetischen Praktik Julii Cäsaris von Padua. Es sind darinn blos die Multipla von 2 bis 100 enthalten.

In W. A. Helds hurtigem Rechenmeister (zu Stuttgart 1741 gedrukt) findet sich eben dieses grose Einmaleins.

Factoren-Tabellen haben die geschikten Mathematiker, Lambert, Schulze, Vega in Deutschland vorzüglich bekannt gemacht.

Auch dienen zu dem gedachten Gebrauch Verzeichnisse von sogenannten Prim-Zahlen, darunter man alle Zahlen verstehet, welche sich gar nicht in Factoren, (insoferne diese ganze

Zahlen sind) zerfällen lassen. Dergleichen sind 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. zwischen 1 und 1000 liegen 169 Zahlen von dieser Beschaffenheit; zwischen 1 und 10000 aber 1229 dergleichen. Die erwähnten Verzeichnisse gehen aber noch viel weiter.

Kommt nun ein Bruch vor, dessen Zähler eine Primzahl ist, z. B. $\frac{227}{16}$, so erspart ein Blik in ein solches Verzeichnis natürlich, die Sorge, ob sich wohl der Bruch in eine ganze Zahl dürfte auflösen lassen. Indessen sind doch grose Einmal Einse in der That noch weit mehr von praktischem Nutzen in gar unzähligen Divisions-Fällen, und berathen einen gleichsam bestimmter fast in jedem Rechnungsgeschäft.

§. 39. Aus den vorhergehenden Bemerkungen kann jeder die Richtigkeit folgender Behauptung abnehmen:

„Jede ganze Zahl läßt sich zu einem Bruch „machen." Man darf sie nur mit einer beliebigen gewählten oder nach den Umständen nöthigen Zahl multipliciren, das Product als einen Zähler über einen Strich schreiben, und unter den Strich die gewählte Zahl setzen; so ist der Bruch fertig, z. B. Anstatt 13 soll ein Bruch geschrieben werden, der nicht mehr, als 13, im innern Gehalt betrage. Schreibe $\frac{4 \cdot 13}{4}$ das ist: $\frac{52}{4}$. Gewiß ist der Werth dieses Bruchs ein

ein Quotient, welcher nicht mehr, noch weniger, als 13 ausmachen kann.

Hiebei kann aber überdem auch bemerkt werden, daß selbst jede ganze Zahl sich ungeändert, als der Zähler eines Bruchs, schreiben lasse, dessen Nenner = 1 ist. Nehmlich

5 ist $= \frac{5}{1}$; 13 ist $= \frac{13}{1}$

wie man einsieht, wenn man von $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{2}$; regressiv schließt; auch wenn man bedenkt, daß 1 in 1 einmal liege, also der Quotient $\frac{1}{1}$ immer $= 1$ sei; $\frac{5}{1}$ aber $= 5.(\frac{1}{1})$ sich schreiben lasse; und dieses also $= 5.1$; das ist 5 für sich betragen müsse.

§. 40. Es ist nun auch Zeit, vom sogenannten Verkleinern oder Reduciren der Brüche (ächter und unächter) zu sprechen.

Wenn ein Bruch vorkäme, welcher im Zähler und Nenner Factoren trüge, von denen zwei sich gleich wären, z. B. $\frac{3.8}{17.3}$; so kann man dafür

zuerst $\frac{3}{3} \cdot \frac{8}{17}$ setzen,
zweitens $1 \cdot \frac{8}{17}$; und endlich $\frac{8}{17}$ schlechthin.

Es ist immer eine Geltung; $\frac{8}{17}$ ist so viel, als $\frac{3.8}{17.3}$, das ist so viel, als $\frac{24}{51}$.

Die erste Umbildung einzusehen, bedenke man, daß $\frac{8}{3}$ so viel ist, als $\frac{1}{3}$ von 8, oder $= \frac{1}{3} \cdot 8$;

$\frac{1}{3}.8$; so wie $\frac{16}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}$ von 16 ist, oder $= \frac{1}{3}.16$.

Ferner, daß $\frac{3}{17}$ so viel, als $3.\frac{1}{17}$ ist, (ganz dem §. 35 und §. 37 gemäs).

Endlich, daß $3.\frac{1}{3}$ so viel, als $\frac{3}{3} = 1$ beträgt.

Aus $\frac{3.8}{17.3}$ läßt sich daher gewiß $(3.\frac{1}{3})$, $(8.\frac{1}{17})$ formiren, das ist: $1.8.\frac{1}{17}$; oder kurz $\frac{8}{17}$.

Man muß nur nie die Anmerkung in §. 26 vergessen, daß in jedem Product der Werth des Products bleibe, die Stelle der Factoren mag sich ändern, wie sie will, indem $3.2 = 2.3$ bleibt. In Beziehung darauf läßt es sich gar nicht in Abrede stellen, daß der Zähler 3.8 auch 8.3 geschrieben werden dürfe. Man kann daher unmittelbar anstatt $\frac{3.8}{17.3}$ schreiben $\frac{8.3}{17.3}$; und das ist $= \frac{8}{17}.1$.

Daß der Betrag selbst ganz eben derselbe bleibe, kann man sich ferner durch augenscheinliche Proben überzeugen. Gewiß ist $\frac{3.8}{17.3}$ so viel als $\frac{24}{51}$. Wer auf ein Quartblatt 51 senkrechte paralele Linien zeichnete, und die Weite von 1 bis 24 abschnitte, würde nicht mehr Papier abschneiden, als wenn er 17 paralele Linien auf ein andres gleich groses Papier zeichnete,

(so

(so daß 1 auf 1, 17 auf 51 käme,) und hievon die Weite von 1 bis 8 abschnitte.

Das Geschäft in diesem Beispiel möchte aber wegen der vielen Linien zu beschwerlich werden. So nehme er eine Eintheilung mit 6 Linien an, und schneide 4 davon ab. Wenn er die Weite der 6 Linien in 3 Linien abtheilt, und die Weite von zwei abschneidet, so werden die Abschnitte wieder gleich seyn. Das läßt sich in Bruchbezeichnung kurz so darstellen: $\frac{4}{6}$ ist $= \frac{2}{3}$. Warum? weil $\frac{2.2}{3.2}$ so viel, als $\frac{4}{6}$ ist; und $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{3} \cdot 1$ beträgt; der Factor 1 aber den Gehalt von $\frac{2}{3}$ nicht ändert.

Aus gleichem Grund ist nun $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; weil sich anstatt $\frac{8}{10}$ schreiben läßt, $\frac{4.2}{5.2}$.

So ist $\frac{84}{3.21} = \frac{4}{3}$; weil $84 = 4.21$ ist; und $\frac{4.21}{3.21}$ natürlich nicht mehr, als $\frac{4}{3}$ bedeuten kann.

So ist $\frac{22}{99}$ ebenfalls $= \frac{2}{4}$; weil in $\frac{22}{99} = \frac{4.23}{3.23}$ sich wieder $\frac{23}{23}$ auf 1 reducirt.

Hieraus erhellet nun wohl zur Genüge, daß jeder Bruch in gar verschiedene Gestalten umgebildet werden könne, ohne daß sich der innere Werth desselben selbst änderte.

Auch sieht jeder bald ein, daß man mit dem verkleinerten Bruch bequemer umgehen, ihn besser übersehen, und dessen Betrag viel deutlicher sich vorstellen könne, als den des grössern, oder unverkleinerten. $\frac{16}{24}$ ist niemals so bequem zu denken, als $\frac{2}{3}$; die Vielheit der 24 Theile ist beschwerlicher, als die von 3 Theilen zu übersehen; alsdenn sind bei der Eintheilung in 24 Theile 16 derselben erst abzuzählen; das ist aber gewiß ein längeres Geschäft, als bei einer Eintheilung in 3 Theile nur zwei derselben zu zählen. Noch beschwerlicher wird das Geschäft, wenn $\frac{32}{48}$, oder $\frac{64}{96}$ vorkommen; oder $\frac{58}{87}$, welcher Bruch wieder nicht mehr, als $\frac{2}{3}$ beträgt, indem sich auch dafür schreiben läßt: $\frac{2 \cdot 29}{3 \cdot 29}$, d. i. $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$.

§. 41. Nach einiger Uebung kommt man ziemlich bald darauf, wie sich wohl sehr viele Brüche verkleinern lassen. Aber bei sehr vielen andern fallen einem die 2 Factoren, welche eine Reduction möglich machen, dagegen gar nicht ein. Ertrüge unser Gedächtnis die Beladung mit dem grosen Einmal-Eins ohne allzu starke Anstrengung, so würden wir freilich in unzähligen Fällen mit sehr beschwerlichen Brüchen gar schnell fertig werden. Da diese Zumuthung aber nicht wohl angeht, so muß man sich

entweder mit Versuchen, das ist: mit einzelnen Annahmen eines vermutheten Multipli, oder mit Tabellen, es seien Factoren-Tabellen, oder grose Einmaleinse, die man nachschlägt, zu behelfen suchen.

Der erste Weg ist nicht ganz zu umgehen, wenn man in praktischen Rechnungs-Geschäften fortkommen will. In unzähligen Fällen hat man keine Tabellen bei der Hand; auch würde deren Auffschlagung bei sehr häufigen Ereignissen allzu beschwerlich fallen. Man muß sich daher Mühe geben, nach und nach schiklich zu rathen, und durch treffende Vermuthungen die rechten Factoren für die Zerfällung des Zählers bald gehörig aufzustellen. Wer viel rechnet, gelangt hierüber auf mannigfaltige Erfahrungen, die ihn sichrer leiten, als man ihm in Büchern vorschreiben kann. Eine vorzügliche Bemerkung mag hier jedoch besonders noch eingerükt werden:

Die Wahrnehmungen über den Ausgang der lezten Zifern im Zähler, mit denen des Renners verglichen, lassen sehr oft schliessen, ob der eine Factor 2, oder 3, oder 5 seyn müsse.

Z. B. bei $\frac{43}{104}$ läßt sich bald auf 2, 4, oder 8 schliessen. Der Anfänger wird wohl nur nach und nach halbiren, als

$\frac{24}{52}$; alsdenn $\frac{12}{26}$; endlich $\frac{6}{13}$.

Der Geübte wird wohl aber sogleich setzen:

$\frac{48}{104}$ ist $= \frac{6.8}{13.8}$, d. i. $\frac{6}{13}$.

Bei einem Bruch, wie $\frac{95}{255}$, wird auf den Factor 5 ohne Mühe die Vermuthung geworfen werden; und der Geübte wird setzen:

$\frac{95}{255}$ ist $\frac{5.19}{5.51}$, d. i. $\frac{19}{51}$.

Allein in gar vielen andern Fällen werden doch mehrere Versuche angestellt werden müssen, wenn besonders die Zähler mit den Nennern über 3 Zifern enthalten; und bei solchen Grösen sind die erwähnten Tabellen von unleugbarem grosem Gebrauch. Man sehe hierüber den §. 38 nochmals nach. Den allergrösten Vortheil gewähren freilich die sogenannten Logarithmen (Vulgar-Logarithmen). Es kann aber gegenwärtig noch nicht gezeigt werden, wie damit umzugehen, und wie sie zu benützen seien, um den Gehalt grosser Brüche (ohne Reduction mit ihnen vorzunehmen) sogleich zu erfahren.

§. 42. Dem ersten Anschein nach, sollte einen bedünken, die Bedürfnis, einen kleinen Bruch formal zu vergrössern, dürfte niemals (oder doch nur selten, etwa in speculativischen Uebungen) eintreten. Wenn man $\frac{4}{5}$ für sich hat, und weiß, diese Grösе sei jezt einmal in dem oder jenem Fall vorhanden, wie könnte man

vermuthen, man brauche diesen Bruch in der Vorstellung mit grössern Zahlen, $\frac{20}{25}$, oder gar $\frac{52}{65}$. Daß das Bedürfnis umgekehrt sich gar oft einstellen müsse, scheint im Gegentheil sehr natürlich, (da man nehmlich anstatt des grössern Bruchs den kleinern nöthig zu haben scheint.) Allein es soll nun sogleich gezeigt werden, daß man gar oft mit den Brüchen in ihren kleinsten Zifern nicht ausreiche, oder zurechtkomme, wenn gewisse Rechnungen durchzuführen vorgelegt werden.

Vor allem kommt diese Unmöglichkeit vor, so oft zwei Brüche zu addiren sind, welche ungleiche Nenner haben. Die Ordnung erfordert es daher, jezt eben über

Addition der Brüche

gehörige Auskunft zu geben.

Wenn $\frac{2}{3}$ eines Raums, und dann wieder $\frac{3}{4}$ desselben Raums oder eines andern, aber (im Ganzen) gleichgrosen Raums zusammen genommen, aneinander gelegt, addirt, werden sollen, so sind offenbar zwei verschiedene Abtheilungen einer Einheit vorausgesezt. Der Raum ist = 1 beedemal. Aber zuerst wird er in 3 Theile vermessen gedacht, alsdenn in vier Theile. Das sind Theilungen verschiedener Art, und daher die Theile selbst auch ungleichartig. Es läuft gegen die Gesetze des menschlichen Verstandes, sie zugleich zu fassen, und mit einemmal anzuneh-

zunehmen. Eine Theilung schließt die andre direct aus. *) Wo aber eine solche Diversität vorhanden ist, da kann man auch nicht fortzählen, wie man bei Dingen gleicher Art, welche in (wenn gleich getrennten) Mengen etwa beisammen oder sich nahe liegen, ungestört fortzählen kann.

Wenn aber die Addition von $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ vorgelegt wird, so verlangt man dennoch eine eigentliche Fortzählung bis zu einer gewissen Summe. Wie mag man sich also wohl hiebei helfen, um die Summe angeben und bestimmt aussprechen zu können?

Diese Räthsel zu lösen, haben die Arithmetiker etwa folgendes erwogen:

1) Zwei Brüche, welche einerlei Benennung tragen, lassen sich ohne Anstand allemal in eine Summe werfen; z. B. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ geben $\frac{5}{7}$ zusammen. So $\frac{4}{9} + \frac{5}{9}$ geben $\frac{9}{9}$ zusammen. Von der Statthaftigkeit solcher Additionen kann sich auch ein schwacher Verstand überzeugen. Man kann durch Anschauungen leichter Abtheilungen auf Maasen, auf Ellen u. s. w. jeden Zweifel dabei ganz sicher widerlegen.

2) Wenn $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ sich in gleichviel geltende Brüche umwandeln liessen, welche einen Nenner trügen, so müßte auch bei ihnen wohl Addi-

*) Man vergleiche hiemit, was oben in §. 8 und §. 11 von Gleichartigkeit angeführt worden.

Addition ohne Schwürigkeit eintreten können. Der Gedanke liegt in der That auf die gefaßte Ueberzeugung von der Richtigkeit der Zählung nach Nr. 1 sehr nahe. Es mußte also blos die Frage übrig bleiben, wie fängt man das an? wie bildet man $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ wohl so um, daß sie gleiche Nenner erhalten?

Ganz gewiß wurden von alten Arithmetikern hierüber anfangs Versuche angestellt, welche nicht immer sogleich glücken wollten. Aber nach und nach kamen sie bald auf sichre und gewisse Regeln, welche von mehrern geglükten Fällen abstrahirt waren.

Sie sahen ein: $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}$ und $\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3}$ sind Brüche von gleichen Nennern, und ihnen in Geltung gleich sind:

$$\frac{10}{15} \text{ und } \frac{12}{15}$$

Diese aber zu addiren, fanden sie dann keinen Anstand. Denn, was hinderte da nur, fortzuzählen, von einer in 15 gleiche Theile getheilten Einheit, auf eine nächste gleich grose ebenfalls so eingetheilte Einheit? Offenbar liegen gleichartige Theile da neben einander, von denen man etliche nehmen, und wieder etliche nehmen, und mit dem Fortzählen aufhören kann, wo es noth ist. Die Summe ließ sich also bei $\frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ mit $\frac{22}{15}$ bestimmt angeben, und damit erhellete zugleich, daß

$\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ sich $\frac{10+12}{15}$ schreiben lassen mußte.

In

In einem andern Fall fanden sie eben so $\frac{2}{7} + \frac{5}{9} = \left(\frac{2 \cdot 9}{7 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7}\right)$ d. i. $\frac{18 + 35}{7 \cdot 9}$ und daher in einem Bruch: $\frac{5}{6}\frac{3}{3}$.

Durch Betrachtung mehrerer Reductionen dieser Art ergab sich ihnen daher die allgemeine Regel:

„Wenn 2 Brüche zu addiren sind, so setze „das Product ihrer Nenner unter einen Strich; „multiplicire den Zähler in jedem Bruch mit „dem Nenner des andern, und addire die 2 lez„tern Producte. Dieß giebt den Zähler des „neuen Bruchs, der die Summe der beeden „einzelnen wirklich ist."

Die Alten sprachen auch manchmal kurz: „Multiplicire unten weg, und übers Kreuz, so „kannst du addiren." Den Grund der Regel aber gaben sie selten an. Er wird nun (hoffe ich) aufgedekt genug seyn, so daß keine weitere Beisätze nöthig seyn dürften.

§. 43. Nur etliche Worte mögen über den Fall noch beigefügt stehen, wenn eine ganze Zahl und ein Bruch addirt werden sollen; (auch wohl noch ein zweiter Bruch dazu).

Z. B. $4 + \frac{2}{3}$. Dafür schreibe $\frac{4 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3}$; und kürzer $\frac{4 \cdot 3 + 2}{3}$ oder $\frac{12 + 2}{3}$ d. i. $\frac{14}{3}$.

Die

Die ganze Zahl muß also allemal in einen unächten Bruch verwandelt werden. Dieß kann nach §. 39 jedesmal geschehen. Der angehängte ächte Bruch (hier $\frac{2}{3}$) verräth den Nenner, welchen der unächte haben muß (hier 3).

Wären aber zwei ächte Brüche vorhanden, und eine ganze Zahl, so muß man zuerst die ächte Brüche unter einen Nenner bringen, und addiren. Ihre Summe zeigt sich hierauf zusammen gezogen in einem neuen Bruch. Alsdenn ist man wieder in dem Fall, zu verfahren, wie wenn eine ganze Zahl, und ein Bruch zu addiren wären.

Z. B. $4 + \frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ wären zu addiren.

Schreibe zuerst $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ ist $= \frac{14 + 15}{21}$, d. i. $\frac{2}{2}\frac{9}{1}$.

Alsdenn schreibe $4 + \frac{2}{2}\frac{9}{1}$ ist $\frac{4 \cdot 21 + 29}{21}$, d. i. $\frac{84 + 29}{21}$; oder in einem Bruch: $\frac{113}{21}$. Dieser Bruch beträgt dann so viel als $4 + \frac{2}{3} + \frac{5}{7}$, oder auch $= 4 + \frac{2}{2}\frac{9}{1}$; das ist $5 + \frac{8}{2}\frac{8}{1}$; weil die Summe der zwei ächten Brüche allein schon $1 + \frac{8}{2}\frac{8}{1}$ ausmacht, und alsdenn $4 + 1 + \frac{8}{2}\frac{8}{1}$ kürzer $5 + \frac{8}{2}\frac{8}{1}$ geschrieben wird.

Im gemeinen Leben läßt man das Zeichen + gewöhnlich weg, wenn eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruch vorgetragen wird, und sezt blos $5\ \frac{8}{2}\frac{8}{1}$, indem man den Bruch durch kleinere Schrift wohl bemerkbar macht. In theoretischen Belehrungen ist es aber doch meistens

stens räthlicher, das Zeichen beizubehalten, um nicht zu einer Irrung Anlaß zu geben, welche bei Multiplication entstehen kann; indem $5 \cdot \frac{3}{2\,1}$ ein Product bedeutet, das von ganz anderm Gehalt ist, als $5 + \frac{3}{2\,1}$; wie bald gezeigt werden soll. Freilich soll der Punkt zwischen 5. und $\frac{3}{2\,1}$, wenn Multiplication gemeint ist, nie vergessen werden. Aber ein Punkt läßt sich eben doch leicht beim Schreiben vergessen, und dann beim Druck, und in der Correctur noch leichter übersehen.

Von Subtraction der Brüche.

§. 44. Brüche von einander zu subtrahiren, erfordert ganz ebendieselbe Vorarbeit, wenn sie nicht für sich schon gleiche Nenner haben.

Niemand kann $\frac{2}{7}$ von $\frac{3}{4}$ direct abziehen, weil es Grösen von ganz ungleichartiger Beschaffenheit sind. Man muß also zuvörderst beede unter eine Benennung bringen, d. i. auf Gleichartigkeit reduciren, und alsdann erst geht Subtraction an. Man schreibt daher $\frac{3}{4} - \frac{2}{7}$ ist so viel, als

$$\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{21 - 8}{4 \cdot 7}$$; und dieß ist $\frac{1\,3}{2\,8}$.

Oefters ersieht man erst nach geschehener Reduction unter einem Nenner, ob sich ein Bruch von dem andern nur wirklich abziehen lasse, oder nicht? ob er im innern Gehalt wirklich

lich kleiner, als der angebliche Subtrahend sei. Z. B. es sollte $\frac{4}{7}$ von $\frac{6}{13}$ abgezogen werden? Wer nicht im Rechnen schon wohl erfahren ist, kann sehr ungewiß werden, welcher Bruch gröſser sei? Er nehme aber nur die Reduction vor; und versuche, was sich ergiebt, wenn geschrieben wird:

$$\frac{6}{13} - \frac{4}{7} \text{ ist } \frac{42}{13.7} - \frac{52}{13.7}$$

Da zeigt sich sogleich, daß $\frac{6}{13}$ wirklich kleiner, als der vorgegebene Subtrahend $\frac{4}{7}$ sei. Zugleich erfährt man die wahre Differenz beeder Brüche, wenn man sie in der Stellung nunmehr blos umkehrt. Denn

$$\frac{52}{13.7} - \frac{42}{13.7} \text{ d. i. } \frac{52-42}{91} \text{ giebt: } \frac{10}{91}.$$

Demnach sind $\frac{4}{7}$ und $\frac{6}{13}$ um $\frac{10}{91}$ unterschieden.

Eben diese Operationen gehen vor, wenn man einen Bruch von einer vorgelegten ganzen Zahl abziehen soll. z. B.

$$4 - \frac{5}{7} \text{ ist} = \left(\frac{4 \cdot 7}{7} - \frac{5}{7}\right) \text{ d. i. } \frac{28-5}{7}$$

oder $\frac{23}{7}$; wofür sich $3 + \frac{2}{7}$ schreiben läßt, weil

$$\frac{23}{7} = \frac{21+2}{7} = \left(\frac{3 \cdot 7}{7} + \frac{2}{7}\right) \text{ beträgt.}$$

Nach und nach wird der geübte Rechner dahin kommen, daß er aus dem Kopf sogleich hinsetzen kann:

$$4 - \frac{5}{7} \text{ ist} = 3 + \frac{2}{7}.$$

Bayerische Staatsbibliothek München

Er denkt etwa den Satz in der Stille so: 4 ist $= 3 + \frac{7}{7}$; (anstatt $3 + 1$) und zieht alsdenn $\frac{5}{7}$ von $\frac{7}{7}$ schnell weg.

Im gemeinen Leben kommen auch oft Fälle folgender Art vor:

Von $5\frac{3}{4}$ soll $2\frac{2}{3}$ abgezogen werden. Da muß man zuerst nach dem vorhergehenden §. 43 jede Grösse, durch Addition unter einen Nenner für sich bringen. Alsdenn erst geht das Geschäft zur Subtraction an. Man sezt

$5 + \frac{3}{4}$ ist $\frac{20+3}{4}$ d. i. $\frac{23}{4}$.

$2 + \frac{2}{3}$ ist $\frac{6+2}{3}$ d. i. $\frac{8}{3}$.

Nun erst werden die Formeln zur Subtraction aufgestellt,

mit $\frac{23}{4} - \frac{8}{3}$. Dafür aber $\frac{69}{12} - \frac{32}{12}$

gesezt werden muß; und alsdenn geht die Subtraction wirklich an:

$\frac{69-32}{12}$ ist $\frac{37}{12}$ oder $3 + \frac{1}{12}$.

Man nimmt leicht wahr, daß in jedem solchen Fall drei Reductionen unter einen Nenner vorgehen müssen, ehe man wirklich subtrahiren kann.

Eben diese Vorarbeiten sind nöthig, wenn die Summe zweier ächter Brüche von der Summe zweier andern abgezogen werden soll, und die

Bayerische Staatsbibliothek München

die einzelnen Brüche für sich verschiedene Renner haben. Das Geschäft ist mehr beschwerlich als kunstreich.

Von Multiplication der Brüche.

§. 45. Zwei Brüche mit einander zu multipliciren, erfordert keine der Vorarbeiten, wie beim Addiren, oder Subtrahiren nothwendig sind.

Um $\frac{2}{5}$ mit $\frac{3}{4}$ zu multipliciren, nimmt man direct die Producte der Zähler und Renner, und schreibt, wie folgt:

$\frac{2}{5}$ mal $\frac{3}{4}$ ist $= \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}$; das ist $= \frac{6}{20}$.

Ebenso $\frac{5}{7}$ mal $\frac{9}{10}$ ist $= \frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 10}$; das ist $\frac{45}{70}$.

Beide Producte, (die hier eben herausgekommen sind) lassen sich in kleinern Zahlen darstellen; denn $\frac{6}{20}$ ist $= \frac{3}{10}$ und $\frac{45}{70}$ ist $\frac{9}{14}$. Aber diese Reduction ist eine Nacharbeit, welche die Multiplication der Brüche für sich nichts angeht, sondern einzeln der Bequemlichkeit wegen nach §. 40 vorgenommen werden mag.

Die Multiplication selbst gehen folgende Bemerkungen an:

Ein Product von ganzen Zahlen ist allemal eine Zahl, die grösser als jeder der Factoren, ist.

Ein Product von Brüchen ist allemal ein

Bruch, dessen Gehalt kleiner, als der Gehalt jedes einzelnen Bruchs ist, der Factor war. Woher kommt das? Dem Unkundigen scheint das ein besonderes Phänomen!

Laßt uns die Beispiele nochmals für die Hand nehmen: Wir haben behauptet:

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ ist $= \frac{6}{20}$ oder $\frac{3}{10}$.

Allerdings ist $\frac{3}{10}$ kleiner als $\frac{2}{5}$, der eine Factor. Denn man schreibe nur, anstatt $\frac{2}{5}$, einmal $\frac{4}{10}$, einen Bruch von ganz gleicher Geltung; so erhellet gewiß gar schnell, daß das obige Product $\frac{3}{10}$ kleiner sei, als $\frac{4}{10}$.

Ferner ist $\frac{3}{10}$ auch weniger als $\frac{3}{4}$. Man bringe nur beede Brüche unter einen Nenner; so ersieht man den Unterschied aufs deutlichste.

$\frac{3}{4} - \frac{3}{10}$ ist $\frac{30}{40} - \frac{12}{40}$; d. i. $\frac{18}{40}$.

Also um $\frac{18}{40}$ oder $\frac{9}{20}$ ist $\frac{3}{10}$ kleiner, als der andre Factor $\frac{3}{4}$.

Damit ist dann die Behauptung für sich wohl hinlänglich erläutert. Aber das Warum so? ist damit noch nicht beantwortet.

Man stelle sich vor, der eine Factor heisse $\frac{1}{5}$, der andere $\frac{3}{4}$; das Product daher heisse $\frac{3}{20}$. Geflissentlich verweile man einige Augenblicke bei dem Bruch $\frac{3}{4}$ einzeln, und allein, und denke etwa dabei so:

Es ist da eine Linie, eine Elle, als die

Lin-

Einheit gemeint, die in 4 Theile zerlegt worden. Davon nimmt jemand 3 Theile; also bleibt noch ein 4ter Theil von der Einheit übrig.

Nun ereignet es sich, daß die Linie, die Elle, oder die Einheit, in 20 Theile zerlegt werden soll, oder wirklich zerlegt wird.

Das sind viel kleinere Theile, als die vorigen Viertel, (Viertheile); und zwar 5 mal kleinere Theile, weil $4.5 = 20$ ist. Man denke sogleich hiebei 4.5 als einen neuen Nenner. Nähme nun davon jemand nur 3 Theile, so hätte er natürlich nur 3 Zwanzigtheile, oder $\frac{3}{20}$; und also viel weniger, als jener, der 3 von vier Vierteln weggenommen hätte; wirklich 5 mal weniger. Es blieben auch nun noch $\frac{17}{20}$ von der Einheit übrig, da vorher $\frac{1}{4}$ geblieben war, dafür man $\frac{5}{20}$ setzen darf.

Diese Operationen denke man sich jetzo in folgender Ordnung neben einander gestellt:

Anfangs war

$1 = \frac{4}{4}$ gedacht; und davon $\frac{3}{4}$ genommen;

Rest $\frac{1}{4}$.

Nachher war

$1 = \frac{20}{20}$ gedacht; und davon $\frac{3}{20}$ genommen;

Rest $\frac{17}{20}$.

Diese $\frac{20}{20}$ sind gleichgeltend mit $\frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 5}$

und $\frac{3}{20}$ ist gleichgeltend mit $\frac{3}{4 \cdot 5}$.

Wer möchte aber in Abrede stellen, daß sich $\frac{3}{4 \cdot 5}$ auch $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$ also in zwei Factoren schreiben lasse? Gewiß so gut, als sich anstatt $\frac{4 \cdot 5}{4 \quad 5}$ auch schreiben läßt $\frac{4}{4} \cdot \frac{5}{5}$.

Jezt spreche man aber $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$ mit Worten aus; Natürlich wird man sprechen können:

$\frac{1}{5}$ mal $\frac{3}{4}$; oder $\frac{1}{5}$ von $\frac{3}{4}$ ist $= \frac{3}{4 \cdot 5}$.

Also das Product $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$ ist nur ein Stück von $\frac{3}{4}$, nur der fünfte Theil von $\frac{3}{4}$; nothwendig daher vielweniger, als $\frac{3}{4}$ allein für sich. Also hat die Multiplication der 2 Factoren ein Resultat im Product ausgegeben, das von viel niedrigerm Gehalt, als der einzelne Factor $\frac{3}{4}$ seyn muß. — Aber auch von viel niedrigerem Gehalt, als der einzelne Factor $\frac{1}{5}$, weil ja $\frac{1}{4 \cdot 5}$ oder $\frac{1}{20}$ allemal weniger, als $\frac{1}{5}$ allein beträgt; und auch $\frac{3}{4 \cdot 5}$ immer gewiß weniger als $\frac{3}{5}$ dem gesunden Menschenverstand nach ausmacht.

Die Behauptung, das Product $(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}) = \frac{3}{20}$ gebe einen Gehalt, der kleiner sei, als jeder der zwei Factoren (einzeln für sich, betrachtet) ist diesem nach wohl gar hinlänglich dargethan; und die Multiplication hat in dem Fall ganz sicher

auf Verkleinerung geführt.

Aber sollten eben die angeführte Schlüsse denn nicht noch ferner gelten, wenn auch der eine Factor nicht blos $\frac{1}{5}$, sondern $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ hieße?

hieße? O ja, sie werden gelten, und bestehen, wenn $\frac{1}{5}$ auch bis $\frac{5}{5}$ wachsen sollte. Man wird sich hievon durch folgende kurze Betrachtung überzeugen können:

$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$ giebt $\frac{3}{20}$; die multiplicirte Factoren geben eine verkleinerte Grösse im Product offenbar.

$\frac{5}{5} \cdot \frac{3}{4}$ giebt $\frac{3}{4}$; $= \frac{15}{20}$ die multiplicirte Factoren geben da weder Vergröserung noch Verkleinerung im Product.

Alle Factoren, welche zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{5}{5}$ liegen, müssen also gar nothwendig bei Multipl. mit $\frac{3}{4}$ auf Verkleinerungen im Product führen. $\frac{3}{4}$ kann niemals mehr (ungeschwächt, als $\frac{3}{4}$) im Product vorhanden seyn, sondern blos noch ein Stück davon. Und so ist in Rüksicht auf den Factor $\frac{3}{4}$ die Behauptung schon wieder gerechtfertigt. In Rüksicht des andern Factors, er heisse nun $\frac{2}{5}$ oder $\frac{3}{5}$ oder $\frac{4}{5}$, ist aber eben so wenig daran zu zweifeln, weil $\frac{3}{4}$ kein Ganzes ist, oder 1 nicht erreicht, und deshalb in dem Product (zu welchem $\frac{3}{4}$ als Factor gehört) weder $\frac{2}{5}$, noch $\frac{3}{5}$, noch $\frac{4}{5}$ ganz mehr vorhanden seyn kann, sondern nur ein Fragment davon, oder nur ein Stük von $\frac{2}{5}$, nur ein Stük von $\frac{3}{5}$, nur ein Stük von $\frac{4}{5}$; Also nothwendig wenniger, als diese Brüche selbst für sich einzeln betragen. Und damit ist auch in Ansehung des 2ten Factors dargethan, daß das Product allemal

mal ein Bruch von kleinerem Gehalt sei als dieser 2te Factor für sich war. Man nehme auch nur

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$; $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$; $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20}$.

Das Product läßt sich allemal von jedem der vorhandenen Factoren ohne Anstand abziehen. Jeder versuche es, nach der Anleitung, welche der vorherg. §. 44 giebt. Denn

$\frac{2}{5} - \frac{6}{20}$ ist $= \frac{8}{20} - \frac{6}{20}$

$\frac{3}{4} - \frac{6}{20}$ ist $= \frac{60}{80} - \frac{24}{80}$.

Die Subtraction geht augenscheinlich gar wohl von statten.

Ebenso bei

$\frac{3}{5} - \frac{9}{20}$, welches $= \frac{15}{20} - \frac{9}{20}$ ist,

$\frac{3}{4} - \frac{9}{20}$, welches $= \frac{60}{80} - \frac{36}{80}$ ist.

Auf diese Weise kann man sich in allen Fällen ohne Ausnahme von der Richtigkeit der aufgestellten Behauptungen überzeugen.

§. 46. Wäre etwa der eine der 2 Brüche, welche Factoren sind, ein unächter Bruch, so wird das Product zwar ein Bruch seyn, dessen Gehalt gröser, als der Gehalt des ächten Bruchs; (des Mitfactors) ist; aber es wird doch allemal weniger, als der Gehalt des unächten Bruchs selbst betragen. Z. B.

$\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}$ ist $= \frac{21}{20}$. Da ist das Product zwar grösser, als $\frac{3}{4}$. Denn $\frac{21}{20}$ ist mehr als 1;

und

und $\frac{3}{4}$ ja weniger. Aber $\frac{21}{20}$ erreicht doch nicht den Werth des andern Factors $\frac{5}{7}$. Offenbar giebt

$$\left(\frac{7}{5} - \frac{21}{20}\right) \text{ oder } \frac{28}{20} - \frac{21}{20} = \frac{7}{20}$$

einen bestimmten Unterschied an, um wie viel der Factor grösser sei, als das Product.

Die Gründe dieses verschiedenen Resultats sind sehr leicht einzusehen; sie liegen ganz schon in den Erläuterungen des nächstvorhergegangenen Blatts.

Uebrigens wird sich zuverlässig alle Dunkelheit, welche in der Theorie der Brüche bei dieser und einigen andern Erörterungen dazu, hie und da etwa noch übrig ist, ganz aufhellen, wenn wir die Lehre von den Verhältnissen beigebracht haben werden; welche nun nach wenigen Seiten folgen soll.

Von der Division zweier Brüche.

§. 47. Wenn ein Bruch durch einen andern dividirt werden soll, so verfahre man, wie folgt:

In dem Bruch, welcher den Divisor abgeben soll, mache man den Zähler zum Nenner, den Nenner zum Zähler; und diesen umgekehrten Bruch multiplicire man alsdenn direct mit dem Bruch, der den Dividend vorstellt.

Z. B. $\frac{6}{7}$ wäre durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren. Der

Divisor ist also hier $\frac{2}{3}$. Diesen Bruch kehre man um, d. i. man schreibe 3 in den Zähler, 2 in den Nenner; also $\frac{3}{2}$. Alsdenn nehme man den Dividenden umgeändert, $\frac{6}{7}$; und spreche

$\frac{6}{7}$ mal $\frac{3}{2}$ oder $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2}$ ist $= \frac{18}{14}$.

Damit hat man den verlangten Quotienten. Der Geübte schreibt ohne Umschweif:

$\frac{6}{7} : \frac{2}{3}$ ist $= \frac{18}{14}$ oder $\frac{9}{7}$.

Ein zweites Beispiel: $\frac{3}{4}$ soll durch $\frac{4}{13}$ dividirt werden. Setze

$(\frac{3}{4} : \frac{4}{13})$ ist $= \frac{3}{4} \cdot \frac{13}{4}$; d. i. $\frac{39}{16}$.

Die verlangte Division wird nehmlich durch zwei Punkte angedeutet, dem §. 33 gemäs. Anstatt der 2 Punkte wird einer gesezt, so bald man multipliciren soll, dem §. 22 gemäs. Die Multiplication selbst wird alsdenn ganz nach §. 45 vollzogen. Das Product giebt den Quotienten, welchen man eben sucht.

Worauf sich diese Regel gründe, läßt sich wieder am füglichsten erklären, wenn die Theorie der Proportionen gelehrt ist. Wenn man diese gefaßt hat, läßt sich in der That erst deutlich einsehen, was eigentlich die Forderung:

Dividire mir einen Bruch durch einen andern!

sagen wolle; was die Intention dessen, der die Auflage macht, seyn könne, und also was

über-

überhaupt unter Division mit Brüchen zu verstehen sei.

Die gegebene Belehrung des mechanischen Verfahrens ist daher eine blose Vorschrift, (præceptum) ohne Beweiß, oder Rechtfertigung ihrer Statthaftigkeit. Diese soll nicht ausbleiben; aber man wird einsehen, daß sie mit Nutzen erst später deducirt werde. Auch wird sich alsdenn recht augenscheinlich darlegen lassen, woher es komme, daß bei ächten Brüchen, der Quotient allemal mehr betrage, als der Dividend, und als der Divisor (jeder einzeln genommen).

Zum mechanischen Verfahren gehört noch folgender Anhang:

Wenn der Divisor eine ganze Zahl wäre, der Dividend aber ein Bruch, so bilde man jenen in einen Bruch um, nach §. 39; und verfahre alsdenn, wie allererst vorgeschrieben worden. z. B.

$\frac{5}{7}$ soll durch 3 dividirt werden; schreibe $\frac{5}{7} : \frac{3}{1} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3}$ das ist: $\frac{5}{21}$. So heißt der Quotient.

Wäre aber der Dividend eine ganze Zahl, dagegen der Divisor ein Bruch, so setze z. B. anstatt $(3 : \frac{5}{7})$ so: $\frac{3}{1} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{5}$.

Oder wenn 8 durch $\frac{5}{6}$ zu dividiren wäre, so schreibe:

$(8 ; \frac{5}{6})$ ist $= 8 \cdot \frac{6}{5} = \frac{48}{5}$ oder $9 + \frac{3}{5}$.

Wenn

Wenn man in Rechnungen auf Fälle stößt, wo der Nenner eines Bruchs selbst wieder ein Bruch ist, auf sogenannte Doppelt-Brüche, so wird man dieselbe, nach dem, was bisher gelehrt worden, gar leicht auf einfache reduciren können. Das Geschäft geht so zu:

Z. B. es komme vor: $\frac{3}{\frac{4}{7}}$. Offenbar ist ebensoviel $\frac{3}{1} : \frac{4}{7}$; das ist: 3 soll durch $\frac{4}{7}$ dividirt werden. Der Quotient wird durch Anwendung der mechanischen Regel sich ergeben $= \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{4}$; oder $\frac{21}{4}$ ist so viel als 3 div. durch $\frac{4}{7}$. Mit jedem Doppelt-Bruch, der vorgelegt wird, wird also (in der Nähe betrachtet) eine Division gefordert, welche bewerkstelligt wird, wie eben angezeigt worden.

Ebenso wird $\frac{5}{\frac{8}{9}} = \frac{45}{8}$ seyn, weil

$\frac{5}{1} : \frac{8}{9}$ so viel, als $\frac{5}{1} \cdot \frac{9}{8}$ beträgt.

Daraus fliest nun die specielle Regel für solche Doppeltbrüche: „Nimm den Nenner „des Nenners (die allerunterste Zifer) und mul„tiplicire sie direct mit dem Haupt-Zähler (dem „obersten); so ist der Doppelt-Bruch allemal damit auf einen einfachen reducirt.

Im nächsten Abschnitt werden diejenige, welche etwa hierüber noch ausführlichere Erläuterungen sich wünschen möchten, (in §. 53) Bemerkungen über die eben aufgeführte Doppelt-

pelt-Brüche antreffen, wodurch ihr Verlangen, vollständige Einsicht über deren Natur und Umbildung zu erhalten, ganz zur Genüge befriedigt werden wird.

VII. Abschnitt.

Von Verhältnissen, und Proportionen.

§. 48.

Bei allen Urtheilen, die der Mensch über viel und wenig fällt, vergleicht er Grösen. Der Knabe, der zwei Schneller hat, und bei einem andern zehn sieht, vergleicht die Zahl der seinigen (2), mit der Zahl des andern (10).

Vielleicht kosten seine zwei Schneller einen Kreuzer. Sind die des andern Knaben nun ohngefehr von gleicher Beschaffenheit, (oder Steinart), so urtheilt er wohl sehr leicht: Sie kosteten fünf Kreuzer. Bei seinem Urtheil lag unleugbar die Vorstellung der Verhältnisse

2 zu 10, oder 1 zu 5

zum Grund; Was aber hier mit einem Wort: Verhältnis, genennt wird, war allerdings nichts anders, als

eine Vergleichung zweier Grösen.

Den Betrag in Geld hatte er nicht, zu wissen, ganz nothwendig. Er konnte auch ein-

mal

mal einen Schneller nur besessen, und bei einem andern fünf gesehen haben; vielleicht auch statt der Schneller andre gleichartige Dinge.

Zwei Grösen bilden ein Verhältnis; Man drükt dessen Daseyn bei Zahlen durch zwei Punkte aus, die man zwischen die 2 Grösen sezt, wie bei der Division.

2:10 wird ausgesprochen: „Das Ver„hältnis zwei zu zehn."

Gesezt, ein solches Verhältnis werde vorgelegt, und alsdenn ein anderes von zwei andern Zahlen, wie 4:20; so erwäge man, ob in dem ersten Verhältnis die kleinere Zahl in der grösern so oft enthalten sei, wie in dem 2ten Verhältnis die kleinere in der grösern. Trift dieß ganz zu, (welches man durch angestellte Division erkennt) so rechtfertigt sich die Combination zu dem Ausspruch:

„Es sind gleiche Verhältnisse vorhanden!"

Z. B. bei den Schnellern kam das Zahlen-Verhältnis 2:10 zuerst vor. Es komme bald darauf ein zweites, den Zahlen nach verschiedenes, vor; 4:20. so vergleicht man beede, und ersieht bald: 2 liege so vielmal in 10, als 5 in 20. Dieses erfährt man ganz genau durch Division:

10, div. durch 2, oder $\frac{10}{2}$ ist = 5

20, div. durch 4, oder $\frac{20}{4}$ ist = 5.

Die

Die herausgekommene gleiche Quotienten zeugen von vorhandener vollkommner Gleichheit der zwei Verhältnisse.

Durch Erwägung dieser Gleichheit wurde man bald zu Aufstellung folgender Signaturen berechtiget,

2 : 10 = 4 : 20

welche die gedachte Gleichheit der Verhältnisse gewiß schiklich ausdrücken; und kurz so ausgesprochen zu werden pflegen:

Zwei zu zehn, wie vier zu zwanzig.

Mit einem Wort nennt man das Daseyn zwei gleicher Verhältnisse eine Proportion; und sprichr dabei: vier solche Glieder machen eine Proportion aus.

Die obige Verhältnisse in noch grössern Zahlen sind,

3 : 15 = 5 : 25

In den kleinsten Zahlen aber besteht blos (rükwärts genommen)

2 : 10 = 1 : 5.

Das Fundamental-Verhältnis ist durchgehends immer 1 : 5, und es bestehet, auch wenn die grösten Zahlen in anders aussehenden Proportionen vorkommen. z. B. in

67 : 335 = 73 : 365
84 : 420 = 990 : 4950.

In

In jeder dieser Proportionen erhält man den Quotienten, 5, wenn man die kleinere Zahl jedes Verhältnisses mit der grössern darin dividirt.

Man nennt diesen Quotienten bei Proportionen gewöhnlich den Exponenten.

Mehrere Beispiele, welche andre Verhältnisse angehen, sind folgende:

$$7 : 56 = 9 : 72$$
$$17 : 136 = 41 : 328$$
$$(8) \qquad (8)$$

Hier ist der Exponent der Verhältnisse schon unten beigesezt; (8). Er ist überall gleich.

$\frac{56}{7}$ ist so viel, als $\frac{72}{9}$, so viel, als $\frac{136}{17}$.

Also auch $\frac{56}{7} = \frac{136}{17}$; überall $= 8$.

Sieben liegt so vielmal in 56; so vielmal 9 in 72 liegt. Eben so vielmal liegt 41 in 328, wie jeder durch Division finden muß.

Das Fundamental-Verhältnis in diesen zwei Proportionen aber ist 1:8. Daher auch die Sätze gelten:

$$7 : 56 = 1 : 8$$
und $41 : 328 = 1 : 8$.

Uebrigens werden alle hier erläuterte Combinationen so zusammengehöriger Grösen, im Kunst-Ausdruck,

geo-

geometrische Verhältnisse,
und geometrische Proportionen
genannt. Was man im Gegensaz unter arithmetischen verstehe, soll sogleich gelehrt werden.

§. 49. Man denke sich die Differenz zweier Grösen, (welche Subtraction giebt):
19 — 12 ist 7.

Man denke zwei viel grössere Zahlen:

1794 — 1787

Deren Differenz ist ebenfalls 7.

Also kommt es nicht auf die Gröse zweier Zahlen an, um gleiche Unterschiede zu erhalten.

Auf dem vorigen Blatt sahen wir, daß es nicht auf die Gröse zweier Glieder in den geometrischen Proportionen an sich ankomme, um gleiche Exponenten zu erhalten. Aber dort war Division nöthig, um den Quotienten, der eben der Exponent heißt, zu bekommen. In den allererst angeführten Beispielen aber führt Division nicht zum Ziel; denn $\frac{19}{12}$ ist ja gewiß nicht 7. Der Betrag von 7 kommt auf einem andern Weg zum Vorschein.

Wenn man die zwei Sätze der zwei Beispiele zusammennimmt, und, weil doch 7 allemal das Resultat ist, so ausspricht:

19 zu 12, wie 1794 zu 1787;

so fällt sogleich in die Augen, daß ein ganz anderes und viel einfacheres Geschäft, als Division ist, vorgenommen werden müsse, um diese Vergleichung oder Combination von ebenfalls 4 Gliedern für gültig anzuerkennen, nehmlich blos Abzug, blos Auswurf eines Restes, einer Differenz. Weil dieser Rest, diese Differenz gleich ausfällt, indem sie hier beedemal 7 ist; so schließt man auch da wohl mit Recht auf ein

gleiches Verhältnis,

aber allerdings auf ein von dem geometrischen ganz verschiedenartiges Verhältnis. Man hat demselben daher auch einen besondern Namen gegeben, und es

das arithmetische Verhältnis

genannt; und alsdenn weiter die Zusammenstellung zweier gleichen Verhältnisse dieser Art

eine arithmetische Proportion;

den gleichen Unterschied selbst aber, den Namen der Ration, nomen rationis, auch den Index, Anzeiger des Verhältnisses, betittelt.

In Bezeichnung der 4 Glieder hat man meistens folgende Darstellung gebraucht:

$$2 \div 7 = 23 \div 28.$$

Manche Mathematiker lassen aber auch die zwei Pünktchen (oberhalb und unterhalb des einfachen Strichs) gar weg, und schreiben blos:

$$2 - 7 = 23 - 28.$$

Mit

Mit Worten wird dabei gesprochen:
Zwei gegen Sieben, wie 23 gegen 28; arithmetisch genommen.

Arithmetische Proportionen kommen in der Rechenkunst, und in Anwendung derselben aufs bürgerliche Leben weit seltener vor, als geometrische. Man muß sie aber dennoch kennen, und ihren Unterschied von den leztern sich recht wohl merken.

In der Lehre von Progressionen, oder Reihen, ist ihre genaue Einsicht schlechterdings wesentlich; aber auch schon bei der im gemeinen Leben doch oft vorkommenden Aufgabe, welche heißt:

„Das arithmetische Mittel nehmen."

Wie dieses genommen werde, und auf welchen Sätzen die Vorschrift, die dabei gegeben wird, beruhe, wird inzwischen nicht hier, sondern weiter unten erst gezeigt werden; der gegenwärtige Abschnitt soll hauptsächlich geometrischen Proportionen gewidmet seyn, über welche nun die wichtigsten Erörterungen der ganzen Rechenkunst ohne Verzug vorgelegt werden sollen.

§. 50. Man kann behaupten: Bei jeder einzelnen Zahl, welche ausgesprochen wird, oder doch bei jeder Zahl-Gröse, welche einer gewissen Menge von Sachen zugeeignet wird, liege ein geometrisches Verhältnis verstekt.

Wer aussagt: Das sind jezt 4 Tage! hat die Verhältnis 1 zu vier, oder 1 : 4, dabei im Sinn, er mag deutlich daran denken, oder nicht. Die Schätzung, wie viel die Dauer von 4 Tagen gegen die von einem Tag betrage, muß ihm nicht fremd seyn. Ohne dieselbe könnte er den Ausspruch gar nicht thun.

Weiter liegen in jeder Multiplication verstekte Verhältnisse. Wer die Behauptung ausspricht: 18 ist 3 mal 6 oder 3 . 6 = 18; denkt wohl nicht daran, daß dabei geom. Verhältnisse zum Grund liegen; sie sind aber wirklich gleichsam im Innern der Behauptung vorhanden. Denn dieselbe gründet sich auf die ausgesezte Proportion.

1 : zu 3 = 6 : zu 18.

Ohnleugbar liegt 6 so oft in 18, so oft 1 in 3. Der Exponent in diesen Verhältnissen ist 3.

Man nehme jeden andern Multiplications-Fall. Allemal wird sich eine solche Proportion aus ihm gleichsam herausheben lassen, in welcher

der eine Factor der Exponent, und zugleich eines der mittlern Glieder selbst ist; das Product aber die Stelle des leztern Gliedes einnimmt.

Z. B. 11 . 16 ist = 176. In der Proportion kommt zu stehen:

1 : 11 = 16 : 176

Da

Da ist wieder die Zahl 11 der Exponent, und zugleich die Gröse des zweiten Gliedes. (Ohnleugbar ist 11 einer der 2 Factoren.)

Man sehe hiebei auf S. 48 in §. 23 zurük. Die dortige Stelle wird nun vollständiger verstanden werden, als sie wohl daselbst sogleich gefaßt werden konnte.

Auch bei jeder Division kommen verstekte Verhältnisse vor: Man spricht: 39 durch 13 dividirt giebt 3. Der Quotient ist also 3; Diese Zahl ist der Exponent folgender geom. Proportion:

13 : 39 = 1 : 3.

Der Divisor und Dividend machen die zwei erste Glieder aus; der Quotient das lezte.

So wird man aus jedem Divisions-Fall eine Proportion bilden können. z.B. $\frac{126}{6}$ ist = 21.

Daraus wird:

6 : 126 = 1 : 21.

Ein geringes Nachdenken führt auf den Schluß:

„Bei jeder Division muß der Divisor eben „so oft im Dividenden liegen, als 1 im Quo„tienten liegt."

Der Exponent erscheint also hier zugleich als die Gröse des lezten Glieds selbst. (21). Ebenso wars in dem nächstvorigen Beispiel.

In den Beispielen, welche in dem Anfang dieses Abschnitts S. 112 aufgezeichnet stehen, sind fast immer Proportionen mit 4 Gliedern vorgelegt worden, welche von dem Exponent verschiedene Zahlen waren, z. B.

in 2 : 10 = 4 : 20

war der Exponent 5.

in 7 : 56 = 9 : 72

war der Exponent 8.

Wir werden in der Folge auch noch genug Fälle dieser Art für die Hand bekommen; allein nothwendig ist diese Verschiedenheit oder Absonderung nicht; die Zahl des Exponenten muß nicht eben eine von den 4 Gliedern verschiedene Zahl seyn. Das ist nun mit hinlänglich-vielen Beispielen, die sowohl aus der Multiplication, als aus der Division hergenommen waren, dargethan.

So viel ist aber dabei gewiß:

„So oft der Exponent selbst eines der 4
„Glieder einer geometrischen Proportion
„ist, so heißt allemal gewiß wenigstens ein
„Glied (von den Vieren) Eins."

Es können auch wohl die zwei mittlern Glieder, jedes, 1 seyn. Von diesem Fall soll aber erst auf einem der folgenden Blätter gehandelt werden.

§. 51. Wir sind nunmehr vorbereitet, die Lehre von geometrischen Proportionen auch

auf

auf die Multiplication und Division mit Brüchen, in Ansehung welcher in §. 45... §. 47. fast blos das mechanische Verfahren vorgetragen worden, näher anzuwenden.

Auch bei jedem Product, das zwei Brüche, als Factoren, ausgeben, liegen geometrische Verhältnisse verstekt.

Man nehme das obige Beispiel aus §. 45. S. 99.

$\frac{2}{5}$ mal $\frac{3}{4}$ ist $\frac{6}{20}$

so läßt sich auch da, wie in dem vorigen §. bei Multiplicationsfällen mit ganzen Zahlen angegeben worden, eine Proportion bilden, deren 1stes Glied, wieder 1 heißt. Sie ist auszusetzen:

$$1 : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} : \frac{6}{20}.$$

Man bringe die zwei mittlern Glieder unter einen Nenner, ganz nach der Belehrung des §. 42, ohne daß man jedoch diese Glieder selbst addiren dürfte. Nehmlich man setze

anstatt $\frac{2}{5}$, was gleich viel ist, $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{4}$ d. i. $\frac{8}{20}$;

anstatt $\frac{3}{4}$, was gleich viel ist, $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5}$ d. i. $\frac{15}{20}$.

Alsdenn schreibe man anstatt 1 in das erste Glied die gleich bedeutende Gröse in Bruchform $\frac{20}{20}$; so wird sich hierauf ganz gewiß

anstatt $1 : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} : \frac{6}{20}$

gleichgeltend setzen lassen:

$$\frac{20}{20} : \frac{8}{20} = \frac{15}{20} : \frac{6}{20}.$$

Sieht man in diesen vier Brüchen die Zähler allein an, so liegt eine geometrische Proportion am Tage, an deren Richtigkeit gewiß kein vernünftiger mehr zweifeln kann; nehmlich

20 : zu 8 = 15 : zu 6.

Der Exponent dieser zwei Verhältnisse ist $\frac{2}{5}$; wie jeder finden wird, der nur einige Versuche darüber anstellen mag. Denn 8 ist doch gewiß $\frac{2}{5}$ von 20; so wie 6 auch $\frac{2}{5}$ von 15 ist. Man schreibe nur

$\frac{20.2}{5}$ d. i. $\frac{40}{5}$ ist 8. Und $\frac{15.2}{5} = \frac{30}{5}$ ist 6.

Auch ist $\frac{8}{20} = \frac{4.2}{4.5}$ d. i. $\frac{2}{5}$; Und $\frac{6}{15} = \frac{3.2}{3.5}$ d. i. $\frac{2}{5}$.

Das zweite Beispiel aus S. 99 werde nun ebenso behandelt. Wir können aber jezt schon viel kürzer zusammenstellen, was hieher gehört: Dort stand das Product:

$\frac{5}{7} \cdot \frac{9}{10} = \frac{45}{70}$.

Wir verstehen nun, wie es ausgesezt wird:

$1 : \frac{5}{7} = \frac{9}{10} : \frac{45}{70}$.

Alles unter eine Benennung gebracht, heißt noch ebensoviel:

$\frac{70}{70} : \frac{50}{70} = \frac{63}{70} : \frac{45}{70}$.

Auch aus dieser Proportion schreibe man hierauf sogleich die Zähler allein heraus:

70 : 50 = 63 : 45.

Ohnleugbar heißt ihr Exponent $\frac{5}{7}$; wie in

die

die Augen schon fällt, wenn man aus den 4 Gliedern folgende 2 Brüche bildet:

$\frac{70}{50} = \frac{45}{63}$.

Bei dem ersten sieht jedes Auge sogleich die Zifern 5 und 7; bei dem zweiten, sobald man Zähler und Nenner in Factoren zerfällt, ebenfalls: $\frac{45}{63}$ ist $\frac{5 \cdot 9}{7 \cdot 9}$; d. i. $\frac{5}{7}$.

Daß übrigens in diesen beeden Beispielen nur gebrochene Exponenten vorkommen, welche wir in §. 48, wie auch in §. 50, noch nicht gesehen haben, darf uns nicht irren. Das Daseyn und die Gültigkeit geometrischer Proportionen hängt von dieser Abweichung gar nicht ab. Genug, daß der Exponent die Grösse ist, welche zeigt, wie vielmal genommen, die kleinere Grösse in jedem Paar Glieder, zur grösern wird. Dieß kann wol 2 mal, 3 mal 4 mal .... aber es kann ja auch nur ein halb mal, ($\frac{1}{2}$ mal), $\frac{1}{3}$ mal, $\frac{1}{4}$ mal, $\frac{1}{5}$ mal, $\frac{2}{5}$ mal, $\frac{5}{7}$ mal u. s. w. seyn.

§. 52. Laßt uns in der Zergliederung noch einen Schritt weiter gehen:

Jeder Bruch kann in zwei Factoren zerlegt werden. Dieß ist schon oben S. 77 in §. 35 gezeigt worden.

$\frac{2}{3}$ ist $= 2 \cdot \frac{1}{3}$. Ebenso $\frac{3}{5}$ ist $= 3 \cdot \frac{1}{5}$.

Aber man kann die zwei Factoren auch beede als Brüche so schreiben:

$\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3}$ ist $= \frac{2}{3}$. Und $\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5}$ ist $= \frac{3}{5}$.

In dieser Darstellung erscheinen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$ offenbar als Producte. Nun nehme man die Umbildung in eine Proportion vor. Ganz nach dem Benehmen in dem nächstvorhergehenden Paragraphen wird sich setzen lassen:

$$1 : \frac{1}{3} = \frac{2}{1} : \frac{2}{3}.$$

Unter einer Benennung aber

$$\frac{3}{3} : \frac{1}{3} = \frac{6}{3} : \frac{2}{3}.$$

Die Proportion in ganzen Zahlen, welche sich hiebei ausheben läßt, ist:

$$3 : 1 = 6 : 2$$

deren Richtigkeit niemand bezweifeln wird.

Gleichförmig formire man aus $\frac{3}{5}$ die Glieder:

$$1 : \frac{1}{5} = \frac{3}{1} : \frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{5} : \frac{1}{5} = \frac{15}{5} : \frac{3}{5}.$$

Daraus sich ergiebt:

$$5 : 1 = 15 : 3$$

Wenn man dieses erwägt, so wird man keine Schwierigkeit finden, folgende Aufgabe, (welche Anfängern wohl ein Räthsel scheinen möchte) spielend aufzulösen:

„Wie mag man jeden vorgegebenen ein-
„zelnen Bruch in eine geometr. Propor-
„tion von 4 Gliedern in ganzen Zahlen
„um-

„umbilden, so daß der Exponent den „Nenner verräth?

Daß die Kunst, dieses Räthsel zu lösen, leicht sei, wird nun wohl sattsam erwiesen seyn. Auch, wenn der vorgegebene Bruch ein unächter Bruch wäre, besteht das ganze Verfahren, doch noch ebenso. Z. B. es werde $\frac{6}{5}$ vorgelegt. Ganz ebenso viel ist $\frac{1}{5} \cdot \frac{6}{1}$; und daraus folgt:

$$1 : \frac{1}{5} = \frac{6}{1} : \frac{6}{5}$$

$$\frac{5}{5} : \frac{1}{5} = \frac{30}{5} : \frac{6}{5}.$$

Woraus in ganzen Zahlen hervorgeht:

$$5 : 1 = 30 : 6.$$

Der Exponent $\frac{1}{5}$ verräth offenbar den Nenner in dem vorgegebenen Bruch.

Von dem Zähler kommt aber bei dieser Zerschlagung in 4 Glieder einer Proportion gar nichts vor. Er ist weder in den Zahlen der Verhältnisse, noch in dem Exponenten ersichtlich.

Allein eben durch die bisherige Beobachtungen kann doch die Frage selbst veranlaßt werden:

Kann man wohl jeden Bruch in eine geometrische Proportion umbilden, in welcher Zähler und Nenner, beede, in ganzen Zahlen erschienen?

Die Antwort hierauf läßt sich bejahend geben. Man wende seine Gedanken nur zuerst

erst auf unächte Brüche, und sodann erst auf ächte.

In allen unächten Brüchen ist der Zähler gröser, als der Nenner, und es läßt sich eine eigentliche Division eben durch den Nenner vornehmen. Der Gehalt des ganzen Bruchs selbst ist aber in dieser Rükficht, als der Quotient anzusehen. Z. B. bei $\frac{37}{12}$ kann man sprechen 12 in 37, liegt 3mal + $\frac{1}{12}$. Also $3\frac{1}{12}$ ist der Quotient; aber $\frac{37}{12}$ ist ebenso viel; die Gröse steht nur in andrer Form da. Zuverlässig läßt sich deshalb dann dem §. 50 gemäs setzen:

$$12 : 37 = 1 : 3\frac{1}{12}$$
$$\text{oder} = 1 : \frac{37}{12}.$$

Mit Worten: 12 steht gegen 37, wie 1 gegen $3\frac{1}{12}$ steht. Es sind also da zwei gleiche Verhältnisse vorhanden, welche eben eine Proportion von 4 Gliedern bilden.

Bei jedem andern unächten Bruch wird man nothwendig ganz auf eben dem Weg zu einer solchen Proportion gelangen. Man lasse den Zähler 37 nach und nach abnehmen, behalte aber den Nenner; die Brüche $\frac{36}{12}$; $\frac{35}{12}$; u. s. f. werden sich alle gleichförmig in solche Proportionen umbilden lassen, in welchen der Zähler und Nenner beede, als einzelne Glieder erscheinen.

Auch

Auch wenn man herunter kommt bis auf $\frac{13}{12}$; und alsdenn bis auf $\frac{12}{12}$, wird sich daraus noch setzen lassen:

$$12 : 12 = 1 : \frac{12}{12} \text{ d. i. } 1 \text{ zu } 1.$$

Alsdenn fängt aber (mit $\frac{11}{12}$) der Zähler an, kleiner, als der Nenner zu werden. Allein was hinderte wohl auch in dem Falle die erwähnte Umbildung:

$$11 : 12 = 1 : \frac{11}{12}$$

und aus $\frac{10}{12}$ die nächstfolgende:

$$10 : 12 = 1 : \frac{10}{12} \text{ oder } \frac{5}{6}.$$

Wer darüber noch Zweifel hegte, erwäge nur noch folgendes: Wer da sagt: „ich besitze $\frac{5}{6}$ dieses Ackers, deutet auf das Daseyn des Verhältnisses $1 : \frac{5}{6}$; (Man vergl. §. 50 im Anf.) er will gleichsam sagen:

„Stelle dir den Acker in 6 gleiche Theile „getheilt vor; davon besitze ich 5.

Das ist ganz eben so viel, als wenn er kunstmäsig sagte:

„Das Ganze des Ackers ist als eine ge„wisse Einheit, (als 1 Morgen) anzu„sehen; und von derselben Einheit besitze „ich das Fragment $\frac{5}{6}$.

Kein Vernünftiger kann wohl hiegegen eine Einrede vorbringen. Ist dem aber so, so kann man auch allemal behaupten: Wenn das

das Ganze einer Sache aus 6 Theilen bestehet, so verhalten sich

6 Theile gegen 5, wie 1 gegen $\frac{5}{6}$.

Die Umbildung in die Glieder einer Proportion

$$6 : 5 = 1 : \frac{5}{6}$$

hat daher auch bei dem vorgelegten Bruch $\frac{5}{6}$ nicht die mindeste Schwierigkeit.

Was aber von diesem Bruch $\frac{5}{6}$ oder $\frac{10}{12}$, gilt auch von $\frac{9}{12}$, und von $\frac{8}{12}$, $\frac{7}{12}$, ... und überhaupt von jedem andern.

Diesemnach läßt sich die auf dem vorigen Blatt aufgeworfene Frage allerdings bejahend beantworten; und wenn allgemein ein Bruch in der Form: $\frac{a}{b}$ vorgelegt wird, behaupten:

es folge aus ihm die Proportion

$$b : a = 1 : \frac{a}{b}$$

wo a grösser, als b, und auch kleiner seyn kann *). Wird $a = b$, d. i. wenn ein Werth von a in Concreto, (wie 37) abnimmt, bis der Gehalt von a dem Gehalt des Nenners gleich kommt, so wird aus $\frac{a}{b}$ werden $\frac{b}{b}$ und daraus sich setzen lassen

$$b : b = 1 : \frac{b}{b} \text{ d. i. 1 zu 1}$$

wel-

*) Man sehe hiebei auf die Erinnerung in §. 28 zurük, insbesondre auf das, was S. 62 steht.

welches mit der Belehrung in §. 35 übereintrift.

§. 53. Wenn zwei Brüche vorgelegt werden, von welchen der eine in den andern dividirt werden sollen, z. B. $\frac{6}{7} : \frac{2}{3}$; so kennen wir bereits aus §. 47 die Vorschrift, wie man nehmlich mechanisch verfahren soll, um den Quotienten, nach welchem bei einer solchen Aufgabe gefragt wird, zu erhalten. Auf welchen Gründen aber das mechanische Verfahren, (nach welchem blos der eine Bruch, der den Divisor vorstellt, umgekehrt, und als Factor in Multiplication benüzt wird) beruhe, hat oben in dem §. 47 noch nicht gezeigt werden können. Jezt ist es Zeit die gedachte Vorschrift zu rechtfertigen:

Wenn zwei Brüche zur Division vorgelegt werden, was wird damit auszumachen verlangt?

Ohne Zweifel wird verlangt: man solle angeben und bestimmen,

wie vielmal der eine Bruch, der Divisor, in dem andern Bruch, dem Dividenden, enthalten sei?

Das will man ja bei jeder Divisions-Aufgabe wissen; also auch bei der mit Brüchen. Bei der Vorlegung von $(\frac{6}{7} : \frac{2}{3})$ soll also ausgemacht werden, wie vielmal $\frac{2}{3}$, insofern dieser Bruch den Divisor vorstellte, in $\frac{6}{7}$ liege?

Um

das Ganze einer Sache aus 6 Theilen bestehet, so verhalten sich

6 Theile gegen 5, wie 1 gegen $\frac{5}{6}$.

Die Umbildung in die Glieder einer Proportion

$$6 : 5 = 1 : \frac{5}{6}$$

hat daher auch bei dem vorgelegten Bruch $\frac{5}{6}$ nicht die mindeste Schwierigkeit.

Was aber von diesem Bruch $\frac{5}{6}$ oder $\frac{10}{12}$, gilt auch von $\frac{9}{12}$, und von $\frac{8}{12}$, $\frac{7}{12}$, ... und überhaupt von jedem andern.

Diesemnach läßt sich die auf dem vorigen Blatt aufgeworfene Frage allerdings bejahend beantworten; und wenn allgemein ein Bruch in der Form: $\frac{a}{b}$ vorgelegt wird, behaupten:

es folge aus ihm die Proportion

$$b : a = 1 : \frac{a}{b}$$

wo a grösser, als b, und auch kleiner seyn kann *). Wird $a = b$, d. i. wenn ein Werth von a in Concreto, (wie 37) abnimmt, bis der Gehalt von a dem Gehalt des Nenners gleich kommt, so wird aus $\frac{a}{b}$ werden $\frac{b}{b}$ und daraus sich setzen lassen

$$b : b = 1 : \frac{b}{b} \text{ d. i. 1 zu 1}$$

wel-

*) Man sehe hiebei auf die Erinnerung in §. 28 zurük, insbesondre auf das, was S. 62 steht.

welches mit der Belehrung in §. 35 übereintrift.

§. 53. Wenn zwei Brüche vorgelegt werden, von welchen der eine in den andern dividirt werden sollen, z. B. $\frac{6}{7} : \frac{2}{3}$; so kennen wir bereits aus §. 47 die Vorschrift, wie man nehmlich mechanisch verfahren soll, um den Quotienten, nach welchem bei einer solchen Aufgabe gefragt wird, zu erhalten. Auf welchen Gründen aber das mechanische Verfahren, (nach welchem blos der eine Bruch, der den Divisor vorstellt, umgekehrt, und als Factor in Multiplication benüzt wird) beruhe, hat oben in dem §. 47 noch nicht gezeigt werden können. Jezt ist es Zeit die gedachte Vorschrift zu rechtfertigen:

Wenn zwei Brüche zur Division vorgelegt werden, was wird damit auszumachen verlangt?

Ohne Zweifel wird verlangt: man solle angeben und bestimmen,

wie vielmal der eine Bruch, der Divisor, in dem andern Bruch, dem Dividenden, enthalten sei?

Das will man ja bei jeder Divisions-Aufgabe wissen; also auch bei der mit Brüchen. Bei der Vorlegung von $(\frac{6}{7} : \frac{2}{3})$ soll also ausgemacht werden, wie vielmal $\frac{2}{3}$, insofern dieser Bruch den Divisor vorstellte, in $\frac{6}{7}$ liege?

Um

Um die Antwort hieraus zu ertheilen, laßt uns die beeden Brüche unter eine Benennung reduciren:

$(\frac{6}{7} : \frac{2}{3})$ ist $=$ $(\frac{18}{21} : \frac{14}{21})$.

Ohne Zweifel wird nun der Divisor $\frac{14}{21}$ so viel in $\frac{18}{21}$ liegen, als der Zähler 14 in dem Zähler 18 liegt. Denn, was sollten die Nenner bei dieser Frage für besondern Einfluß haben können, wenn sie gleich sind? Blos die Zähler bestimmen ja das Verhalten zweier Brüche durchgehends bei allen Grösen, welchen einerlei Benennung, (das ist hier, eine und eben dieselbe Einheit) zum Grunde liegt.

Wer demnach darnach fragt; „wie oft liegt $\frac{14}{21}$ in $\frac{18}{21}$? dem kann man antworten: „So oft, als 14 in 18 liegt. Aber

14 verhält sich gegen 18 $=$ wie 1 gegen $\frac{18}{14}$

oder $=$ 1 : $1\frac{4}{7}$.

Folglich werden sich auch

$\frac{14}{21} : \frac{18}{21}$ $=$ wie 1 : $\frac{18}{14}$

gegen einander verhalten; oder der Bruch $\frac{18}{14}$ wird der Quotient bei der aufgegebenen Division seyn, insoferne $\frac{14}{21}$ der Divisor, und $\frac{18}{21}$ der Dividend wäre.

Hiemit fällt in die Augen, daß man durch die vorgeschlagene Reduction unter einen Nenner sehr natürlich darauf hingeleitet werde, einzusehen:

„das

„das ganze Divisions-Verfahren bei Brü-
„chen, ruhe auf den nehmlichen Gründen,
„wie das bei und mit ganzen Zahlen, wo-
„von in §. 50 gehandelt worden.

Der Quotient verhält sich zu 1, wie der Dividend zu dem Divisor; und umgewendet; der Saz kommt überall wieder in der Anwendung vor, der Dividend und Divisor mögen aus ganzen Zahlen bestehen, oder sie mögen Brüche seyn.

Man nehme sogleich einen zweiten Fall vor die Hand: es sei zur Division $(\frac{4}{5} : \frac{1}{3})$ vorgelegt; und $\frac{1}{3}$ als der Divisor genannt. Wie oft liegt $\frac{1}{3}$ in $\frac{4}{5}$? ist die Frage; die Antwort muß einen Bruch angeben, der den Quotienten vorstellt. Sie erfolgt, wenn man sich, anstatt $(\frac{4}{5} : \frac{1}{3})$ unter einer Benennung $(\frac{12}{15} : \frac{5}{15})$ denkt; und sogleich die Proportion formirt:

$\frac{5}{15}$ zu $\frac{12}{15}$ wie 1 zu $\frac{12}{5}$

welche das lezte Glied so, wie vor Augen liegt, enthält, weil

5 zu 12 = 1 zu $\frac{12}{5}$

zuverlässig richtige Verhältnisse sind; und die Brüche

$\frac{5}{15} : \frac{12}{15}$ sich gegeneinander,

wie die ganze Zahlen 5 zu 12 verhalten.

Der verlangte Quotient ist also gewiß $\frac{12}{5}$; und daher

$(\frac{4}{5} : \frac{1}{3}) = \frac{12}{5}$ oder $2\frac{2}{5}$.

Nach Voraussetzung dieser Entwiklungen erst laßt uns auf das mechanische Verfahren zurükkommen; dessen wir im Anfang dieses §. wie auch schon in §. 47 gedacht haben:

Nach demselben vollführt man die Division von $(\frac{6}{7} : \frac{2}{3})$ so:

$\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2}$ ist $= \frac{18}{14}$ oder $\frac{9}{7}$.

und die Division von $(\frac{4}{5} : \frac{1}{3})$ so:

$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{1}$ ist $= \frac{12}{5}$ oder $2\frac{2}{5}$.

Das mechanische Verfahren, durch Umkehrung und Multiplication, führt diesemnach ganz auf die Resultate, welche man erhält, wenn man Proportionen bildet, um den verlangten Quotienten zu bekommen. Das lezte Glied der formirten Proportion stellt allemal eben die Gröse dar, welche das Product darstellt, das die Multiplication des umgekehrten Divisors in den Dividenden giebt. Die mechanische Operation wird daher ebendadurch gerechtfertigt, weil das gedachte Product immer dem gedachten vierten Glied gleich, und dieses 4te Glied erwiesenermaßen zuverlässig der gesuchte Quotient ist. *)

§. 54.

Anmerkung. Beim Schluß dieser Lehre mag auch noch der Beweis folgender Behauptung beigebracht werden.

„Jeder Bruch, dessen Nenner selbst ein „Bruch ist, giebt eine ganze Zahl, wenn der „Bruch im Nenner eins zum Zähler hat.

Z. B.

§. 54. Durch die bis hieher geführte Belehrungen ist jeder Anfänger gewiß vorbereitet

z. B. $\frac{3}{\frac{1}{4}}$ ist $= 3 \cdot 4$ das ist 12; eine ganze Zahl.

Beweis. Aus dem Bruch $\frac{3}{\frac{1}{4}}$ formire man eine Proportion, (ganz nach den Lehren des §. 53 im Eingang) also:

$\frac{1}{4}$: zu $3 = 1$: zu $(3 : \frac{1}{4})$.

Unter einem Nenner ist eben so viel:

$\frac{1}{4} : \frac{12}{4} = \frac{4}{4} : \frac{48}{4}$.

An der Richtigkeit des leztern Glieds kann niemand zweifeln; man sehe nur die Zähler in den drei ersten Gliedern allein an; sie geben $\frac{12 \cdot 4}{1}$ d. i. $12 \cdot 4$ oder 48. Die Nenner sind überall gleich. Also $\frac{48}{4}$ heißt das lezte Glied gewiß; aber 4 in 48 giebt eine ganze Zahl, 12; Und diese Zahl ist eben die, welche man oben behauptet hat.

Umgewendet wird aus jedem Bruch von der Gestalt $\frac{\frac{1}{4}}{3}$ einer $= \frac{1}{4 \cdot 3}$ oder $\frac{1}{12}$.

Die Umbildung in diese einfache Form läßt sich auf eine ganz leichte Art selbst ohne Aufstellung von Proportionen, darthun. Man erwäge nur folgenden Gedanken:

Wer $\frac{1}{4}$ einer Elle Tuch hat, und dieses Viertel in 3 Theile theilt, nimmt natürlich $\frac{1}{3}$tel von $\frac{1}{4}$; d. h. er denkt

$\frac{\frac{1}{4}}{3}$ ist $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$tel mal; oder $(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3})$

wobei

reitet genug, um den sogleich aufzustellenden Lehrsaz, welcher Brüche wie ganze Zahlen angeht, und von der höchsten Wichtigkeit in Arithmetik ist, zu fassen:

In allen geometrischen Proportionen beträgt das Product aus den zwei äussern Gliedern jedesmal so viel, als das Product der zwei mittlern.

Den Beweis dieses Theorems erkennt man auf folgende Art:

1) In jedem durch 2 Grösen vorgegebnen Verhältnis ist das grösere Verhältnis-Glied anzusehen,

als ein Product des kleinern Glieds, und des Verhältnis-Exponenten.

Man nehme von den obigen Beispielen, welches man will, und setze vor Augen hin:

$$7 : 56 = 9 : 72$$
$$(8) \qquad (8)$$

Allerdings läßt sich ja auch schreiben:

$$7 : \text{zu } 8 \cdot 7 = 9 : \text{zu } 8 \cdot 9.$$

Dieß wobei man auch spricht: $\frac{1}{4}$ zu einem $\frac{1}{3}$ genommen. Damit erscheinen aber offenbar 2 Brüche, als Factoren; und diese $(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3})$ geben allerdings nichts anders aus, als $\frac{1}{12}$; (nach §. 51).

Die Theorie, doppelte Brüche zu reduciren, beruht daher auf sehr einfachen Gründen, die nunmehr wohl jeder einsehen muß.

Dieß vorausgesezt, betrachte man 2tens nun auch

das Product	gegen das Product
der äussern	der mittlern
Glieder:	Glieder:
7 mal 72	9 mal 56
und in drei	und in drei
Factoren	Factoren
7 . 8 . 9	9 . 8 . 7

Kein Mensch kann zweifeln, daß der Betrag zur rechten und zur linken Hand gleich sei:

7 . 8 . 9 = 9 . 8 . 7.

Denn es sind eben dieselbe Zahlen, welche durch einander multiplicirt werden. Welche zuerst, oder welche zulezt steht, darauf kommt bei Multiplication niemals etwas an. Man sehe auf S. 54 in die Note zurük. Gewiß läßt sich anstatt 9.8.7 auch 7.8.9 schreiben. Der Betrag der Producte ist gleich, und ist jedesmal = 504, man mag multipliciren, wie man will.

Wem an diesem Beispiel nicht genügt, der nehme andre vor, so viel er mag; er wird allemal gleiche Producte der äussern und mittlern Glieder finden.

20 : 80 = 15 : 60

werde geschrieben:

20 : 4.20 = 15 : 4.15

indem der Exponent allerdings 4 heißt.

Nun sind $20.4.15 = 4.20.15$
Das ist: $1200 = 1200$.

Folglich wird die Behauptung abermals bewährt.

Man nehme einen Fall, in welchem der Exponent ein Bruch ist:

$$50 : 70 = 45 : 63$$
$$\left(\tfrac{7}{5}\right) \qquad \left(\tfrac{7}{5}\right)$$

Man schreibe:

$$50 : \frac{50.7}{5} = 45 : \frac{45.7}{5}$$

Da ist gewiß: $\frac{50.45.7}{5} = \frac{50.7.45}{5}$

oder $50.9.7 = 50.7.9$.

Das Product ist beedemal: 3150.

§. 55. Jeder kann aus den vorhergehenden Sätzen ohne Mühe ersehen, daß der Exponent in allen geom. Verhältnissen zureiche, von zwei Grösen, die ein Verhältnis ausmachen, so bald die eine bekannt oder gegeben ist, in Verbindung mit dieser die zweite auszudrücken. Ueberall kann man ja, wie bei $7 : 56$ sich denken:

$7 : (8.7)$
bei $14 : 112$
$14 : (8.14)$

} In beeden Fällen ist 8 der Exponent des Verhältnisses.

Wäre nun dieses Verhältnis schon determinirt (irgend woher fest gesezt), also die Zahl 8,

der

der Exponent, gegeben, und das erste Glied, 7 oder 14, so möchte immer in beeden Beispielen das zweite Glied, 56, oder 112, anfangs unbekannt, verdekt, stehen, ein räthselhaftes x seyn; Man wird dieses Glied doch gewiß sogleich darstellen können. Denn

für 7 : x wird sich 7 : (8.7)
(8)

für 14 : x wird sich 14 : (8.14)
(8)

hinschreiben lassen, und wer die 2 Factoren einmal vor sich sieht, (8 mal 7), dem ist sicher das Product selbst 56 auch nicht lange mehr unbekannt.

Also, mit dem Exponenten und einem Glied eines jeden Verhältnisses läßt sich das andre allemal finden. Den Saz kann kein vernünftiger Mensch bezweifeln.

Sollte etwa von den zwei Zahlen die gegebene nicht eben die kleinere seyn, wie bisher, sondern die größre, und die kleinere gesucht werden, so wird der Exponent, wenn er vorher 8 war, nun $\frac{1}{8}$ seyn, wenn er vorher n war, nun $\frac{1}{n}$ heissen. z. B.

56 : x ist = 56 : (56 . $\frac{1}{8}$) d. i. 56 : 7
($\frac{1}{8}$)

112 : x ist = 112 : (112 . $\frac{1}{8}$) d. i. 112 : 14.
($\frac{1}{8}$)

Ebenso, wenn in der Proportion

$$9 : (7.9) = 9 : 63$$

der Exponent 7 ist; so gehört zu der Umwendung, oder

zu $63 : x$, der Exponent $\frac{1}{7}$; und daher

$63 : (63.\frac{1}{7})$ das ist $63 : 9$.

Man könnte auch sagen: Statt Multiplication tritt in diesem Fall Division ein. Multiplicirte vorher 8, so dividirt es jezt; Multiplicirte vorher 7, so dividirt es jezt. Der Dividend ist die gegebene Grösse, der Quotient die gesuchte, d. i. das Glied des Verhältnisses, nach welchem man fragt.

Der Gleichförmigkeit des Ausdruks wegen, halte ich es aber für räthlich, von dem Exponenten forthin durchgehends, als von einem Factor zu sprechen; er mag eine ganze oder eine gebrochene Zahl seyn. Er heisse allgemein e (der Anfangsbuchstabe seines Namens, Exponens, ist der schiklichste;) und ein Verhältnis in Zahlen werde allgemein gedacht

$a : x$; (a zu x ausgesprochen,)

so ist $a : (a.e)$ gewiß eben so viel.

Denn $a.e$ stellen ja zwei Factoren vor; a ist das gegebene erste Glied; das zweite muß ein Product seyn, aus der gegebenen Zahl, a, und dem gegeben Exponenten e. Das Product $a.e$ wird also das Geheimnis verrathen, was x sei,

d. i.

d. i. a.e wird = x seyn. Dieses hat nun ohne Ausnahme, ganz allgemein, statt; e mag eine ganze oder eine gebrochene Zahl in Concreto seyn. Man kann demnach den Exponenten allerdings durchgehends sich als einen Factor, und von den zwei Grösen, welche ein Verhältnis zusammen ausmachen, das eine allemal als ein Product zweier Factoren denken. *)

*) Es wird hier kein unschiklicher Ort seyn, in Kürze folgende allgemeine Vorstellungen zusammen zu ordnen:

Es sei eine geometr. Proportion in allgemeinen Zeichen vorgegeben:

a : b = c : d.

Der Exponent der Verhältnisse zur rechten und linken heissen e; so wird sich die Proportion gleichgeltend auch so schreiben lassen:

a : a.e = c : c.e

so daß damit b = a.e erscheint, uud d = c.e.

Dieses ist sicher den Vorträgen in §. 54 Nr. 1, und denen in §. 55 gemäs.

Jezt stelle man das Product der äussern Glieder (a.c.e) neben das Product der mittlern (a.e.c). Die Producte sind gewiß gleich

a.c.e ist = a.e.c

weil c.e so viel, als e.c beträgt, und die Ordnung in Stellung zweier Factoren im Betrag des Products selbst unmöglich etwas ändern

§. 56. Nach diesen Voraussetzungen muß es nun jedem einleuchten, daß, wenn zwei gleiche Verhältnisse gedacht und angenommen worden, das 2te Glied in dem einen dieser Verhältnisse aber verdekt geschrieben würde, wie z. B.

17 : 136 = 41 : X

dieses lezte Glied sich unverzüglich errathen, und in bestimmter Zahl einschreiben lasse. Nehmlich, mit den zwei ersten Gliedern ist ihr Exponent gegeben. Er ist 8; weil $\frac{136}{17} = 8$ ist. Da man nun, anstatt der 2 ersten Glieder

17 : 136, auch 17 : (8.17)

schreiben kann, so kann man gewiß auch, anstatt der zwei lezten Glieder

41 : X

schreiben: 41 : (8.41); das ist: 41 : 328.

Und damit ist die Zahl, welche in das lezte Glied gehört, entdekt; x ist so viel als 328. Gewiß dern kann. (vergl. S. 86) Ist aber dem so, so ist auch

(a.d) = (b.c)

eben, weil (a.c.e) = (a.e.c) ist;

und eben damit liegt die Evidenz des Beweises über das Theorem §. 54 klar am Tage. Die gedachten Producte sind allemal gleich, weil die 3 Factoren zur rechten und linken Hand des Aequal-Zeichens ebendieselben sind.

Gewiß wird niemand an der Richtigkeit der Proportion

17 : (8.17) = 41 : (8.41)

einen Zweifel hegen können. Die Voraussezung, es seien gleiche Verhältnisse angenommen, macht den gleichen Factor, in jedem hintern (zweiten) Glied nothwendig. Damit ist aber eben (8.41) verrathen, weil (8.17) gegeben ist.

Hieraus folgt, daß

„aus den drei bekannten vordern Gliedern jeder Proportion sich das lezte unbekannte Glied finden lasse.

In einem zweiten Beispiel läßt sich nunmehr der schon gegebene Beweis mit wenigen Worten darlegen. Es wird gefragt, was kann in der angenommenen Proportion

4 : 52 = 12 : x

die verdekte Gröse, x seyn?

Antwort: $\frac{52}{4}$ ist 13. So heißt der Exponent der 2 ersten Glieder. Der Exponent der zwei hintern muß eben so heissen. Sonst wäre ja gar keine Proportion vorhanden, deren Daseyn doch angenommen wird. Die Proportion läßt sich daher schreiben:

4 : (13.4) = 12 : (13.12)

d. i. 4 : 52 = 12 : 156.

Die verdekte Gröse im lezten Glied ist diesemnach als 156 erwiesen.

§. 57. Man kommt auf dieses lezte Glied hinaus, wenn man mechanisch folgende Vorschrift befolgt:

„Multiplicire die zwei mittlern Glieder, und „dividire das erhaltene Product durch das „erste Glied. Der Quotient ist das ver„langte Glied.

Worauf beruht aber diese Vorschrift?

Auf der Betrachtung, daß 1) das Product der mittlern Glieder aus drei Factoren bestehen, wie 13.4.12 sind; das Product der äussern aber allemal ebenfalls nach §. 54 aus drei, welche jenen drei ganz gleich sind, ob man schon nur 4.x = 13.4.12 schreiben kann, so lange x noch unbekannt ist.

Daß 2tens) aus den drei Factoren der mittlern Glieder sich der vom ersten Glied hergenommene (hier 4) wegschaffen lassen müsse, wenn man durch 4 selbst diese drei Factoren (oder ihr Product) dividirt. Denn $\frac{13.4.12}{4}$ ist gewiß so viel, als 13.12, weil $\frac{4}{4}$ für 1 gilt; und der Factor 1 nicht geschrieben werden muß, noch gewöhnlich geschrieben wird.

Daß 3tens) diese zwei übrige Factoren das lezte Glied selbst abgeben müssen, indem ihr Betrag ja nichts anders, als = x seyn kann, weil die Gleichung fest steht,

4.x = (13.4.12) (nach d. 1sten Betracht.)

also auch die Gleichung

$$\frac{4}{4} \cdot x = (13 \cdot \frac{4}{4} \cdot 12)$$ *)

das ist: $1 \cdot x = (13 \cdot 12)$ nach d. 2ten Betrachtung.

Aber $1 \cdot x$, oder einmal die verdekte Gröse genommen, ist eben, was man sucht, das lezte Glied. Und damit erhellet dann, daß es nicht mehr noch weniger als $(13 \cdot 12)$, das ist, als 156 seyn könne.

Wenn man dieses gefaßt hat, so mag man in andern vorkommenden Fällen immerhin mechanisch das 4te Glied suchen; z. B. Wenn vorgelegt würde

$$7 : 154 = 9 : x$$

so wird 9mal 154, divid. durch 7, d. i. $\frac{154 \cdot 9}{7}$, wird so viel als x seyn, oder $\frac{1386}{7}$ d. i. 198 wird der Quotient seyn, und das lezte Glied abgeben. Den Beweis giebt man sich natürlich nicht bei jedem einzelnen Falle von neuem; es ist genug, wenn man weis, worauf er beruhet; und wie man ihn jedem Zweifler in jedem Augenblik führen kann.

Als Recapitulation stehe folgende Zusammenordnung noch zum Schluß hier:

Der

*) Diese Gleichung steht allerdings fest, weil ja auf der einen Seite des Aequalzeichens vorgeht, was auf der andern, eine Division durch eine und ebendieselbe Gröse, 4.

Der Exponent ist $\frac{154}{7} = 22$. Folglich hat nach §. 56 gewiß statt:

$$7 : (22 . 7) = 9 : (22 . 9).$$

Wenn man aber das lezte Glied noch nicht wüßte, jedoch aber den Exponenten, so wäre zu seßen

anstatt $7 . x = (154 . 9)$ gleich darunter
$7 . x = (22 . 7 . 9)$; nach dem Eingang dieses §.
Alsdenn $\frac{7}{7} . x = (22 . \frac{7}{7} . 9)$; womit man
$x = 22 . 9$ oder: 198 erhält. *)

§. 58.

*) In allgemeinen Zeichen läßt sich die Richtigkeit des mechanischen Verfahrens in Regel-de Tri-Sätzen kurz so darthun: Wenn in der geom. Proportion:

$$a : b = c : d$$

die drei erste Glieder bekannte Grösen enthalten, also a, b, c, gegeben, (in Concreto bestimmte, ausgesprochene Zahlen) sind; das lezte Glied aber, d, erst gesucht wird, d. i. in bekannten Grösen erst ausgedrükt werden soll, so ist die Vorschrift:

„Multiplicire b mit c, und dividire das Product (b . c) durch a; so erhältst du den Betrag von d; und die unbekannte Grösе ist gefunden: $\frac{b . c}{a}$ ist $= d$.

Beweis. Der Exponent der zwei Verhältnisse heisse, e. Gewiß wird eben so viel, als

$$a : b$$

§. 58. Die Vorträge der vier lezten Paragraphen von S. 131 bis S. 142, enthalten

$$a : b = c : d$$

auch $a : a.e = c : c.e$ bedeuten.

Man muß diese Umbildung zugestehen, auch wenn man nicht sogleich weis, was e in Concreto als Zahl bedeutet. Genug daß e den Exponenten, und dessen Grösen-Betrag anzeigt. So bald dieß zugestanden wird, muß auch zugestanden werden, daß $b = a.e$ sei, (ganz nach §. 55); und ebenfalls, daß $d = c.e$ sei.

Aber die Vorschrift sagt: d sei $= \frac{b.c}{a}$.

Wie besteht diese Gleichung mit der $d = c.e$? Sie kann nicht anders bestehen, als insoferne selbst c.e so viel, als $\frac{b.c}{a}$ beträgt, d. i. wenn auch $c.e = \frac{b.c}{a}$ ist. Ist diese lezte Gleichung richtig und wohl gegründet, so ist auch die Vorschrift, (die mechanische Regel,) gerechtfertiget. Demnach hängt die verlangte Rechtfertigung von dem Beweis ab, daß c.e und $\frac{b.c}{a}$ Aequivalente seien. Dieser Beweis läßt sich aber sehr leicht führen: b ist $= a.e$; das läßt sich nicht widersprechen. Ohne Zweifel darf daher in die Formel $\frac{b.c}{a}$ für den Factor b die gleiche Geltung a.e in den Zähler eingesezt (substituirt) werden. Damit erhält man dann anstatt $\frac{b.c}{a}$ die Formel $\frac{a.e.c}{a}$.

Aber

ten vollständig die Gründe der Vorschriften, welche man in allen Rechenbüchern giebt, um die sogenannte

Regel de Tri

auszuüben. Ich muß mich jezt weiter anschicken, die gehörigen Belehrungen über mehrere Vortheile, die bei der Ausübung der bemelten Regel zu wissen nothwendig sind, nun ebenfalls beibringen; es will mir aber räthlich scheinen, zuvor

Aber dieser Bruch läßt sich auch in der Gestalt $\frac{a}{a}$.e.c; (ganz nach §. 35) Was

aufführen: $\frac{a}{a}$.e.c; (ganz nach §. 35) Was ist aber $\frac{a}{a}$.e.c anders, als 1.e.c oder als e.c selbst?

Und hiemit sind wir eben am Ziele.

c.e ist $= \frac{b.c}{a}$; weil eben so viel

$= \frac{a.e.c}{a}$ ist; und eben so viel

endlich = 1.e.c, d. i. e.c gilt.

So kommt man ohne Widerspruch auf c.e = e.c; welches ganz gewiß Aequivalente sind; (nach §. 26) und wird eben damit von der Richtigkeit der vorgeschriebenen Formel $\frac{b.c}{a}$ = d überzeugt, weil man vom Anfang her, von der Richtigkeit c.e = d schon überzeugt gewesen war. Die leztere Ueberzeugung muß man also vor allem andern mitbringen, wenn man die Rechtmäsigkeit der vorgeschriebenen Formel $\frac{b.c}{a}$ sich deduciren will.

zuvor noch verschiedene Bemerkungen über die Bildung der Proportionen, und die (formale) Umgestaltung vorgegebener Verhältnisse in Kürze zusammen getragen, hier sogleich einzurücken:

1) Jede Proportion kann zu Aufstellung zweier Producte wie auch zweier Quotienten gebraucht werden. z. B.

aus $7 : 154 = 9 : 198$

kann man die Producte $7 \cdot 198 = 9 \cdot 154$ aufstellen, und auch $\frac{154}{7} = \frac{198}{9}$; gleiche Quotienten.

Die erste Behauptung ist ganz dem Saz in §. 54 gemäs; die zweite denen in §. 55. Die 2 Brüche sind ja blos Exponenten, und diese sind gleich; sonst wäre das Daseyn einer geom. Proportion gar nicht eben möglich, oder als jezt existirend zu denken.

2) So oft zwei gleiche Producte vorhanden sind, so läßt sich daraus eine geometrische Proportion bilden.

Man darf nur jedes Product sich, als aus zwei Factoren bestehend, denken, (wenn es auch aus drei oder 4 bestehen möchte) und die zwei Factoren des einen Products, als die zwei mittlern Glieder einer geom. Proportion sich vorstellen; die zwei andre aber, als die 2 äussern Glieder derselben Proportion, so steht die Proportion vollkommen formirt da.

z. B. Man bekäme die Gleichung vor sich:

$$5 \cdot 9 = 3 \cdot 15$$

so denke man die zwei Factoren, 5 und 9 in der Mitte einer Proportion als Glieder, so muß 3 ein äusseres Glied seyn, und 15 das andre äussere, so daß statt haben wird

$$3 : \text{zu } 5 = 9 : \text{zu } 15$$

oder aber: $15 : \text{zu } 5 = 9 : \text{zu } 3$.

Nehmlich, wenn die zwei mittlern Glieder stehen, so ist damit noch nicht ausgemacht, welcher von den zwei übrigen Factoren das erste Glied einnehmen soll. Jeder kann dahin eingeschrieben werden; der übrigbleibende paßt allemal zum lezten Glied, so daß eine geometrische Proportion damit an den Tag kommt, man mag, welchen Factor man will, zum ersten Glied gewählt haben.

Die Gründe hievon liegen wieder in dem Theorem, das in §. 54 dargethan worden.

Möchte aber jemand doch etwa noch ein Zweifel hierüber einfallen, der nehme die Ueberlegungen dazu, zu welchen der Stoff sogleich auf der nächsten Seite (Nr. 4) reichlich dargeboten werden wird.

3) Die Verhältnisse bleiben ebendieselbe, und die Exponenten ändern sich nicht, wenn man

man auch die zwei vordern Glieder durch eine 3te Gröſe multiplicirt.

Z. B. Anſtatt der oben S. 145 geſezten Zahlen der lezten Proportion ſchreibe man:

$$\left.\begin{array}{l} 14 : 308 \\ \text{d. i. } 2.7 : 2.154 \end{array}\right\} = 9 : 198.$$

Der Factor 2 ändert die vorigen Verhältniſſe nicht. Denn man ſchreibe nur in Brüchen $\frac{2.154}{2.7} = \frac{198}{9}$. Eben ſo viel iſt ja $\frac{154}{7} = \frac{198}{9}$.

Jedesmal kommt der Exponent 22, und kein andrer zum Vorſchein.

Die Behauptung in dieſer Nr. 3 beſteht, wenn auch in die 2 erſte Glieder mit einer Zahl dividirt würde, (nicht multiplicirt.) Der Beweis iſt ebenderſelbe. Denn z. B.

$$\frac{7}{2} : \frac{154}{2} = 9 : 198$$

giebt wieder den Quotienten: $\frac{2.154}{2.7}$ d. i. 22; wie vorher.

4) In jeder Proportion kann man das 3te Glied zum zweiten machen. Man erhält dadurch wohl andre Erponenten, aber doch allemal wieder eine gültige Proportion; und das erſte und lezte Glied bleibt unverändert. z. B.

wenn $7 : 154 = 9 : 198$

gültig iſt, ſo iſt auch die Proportion gültig:

$$7 : 9 = 154 : 198.$$

Beweis. Man schreibe nur die Glieder 154 und 198 in Factoren; also:

$$7 : 9 = (7.22) : (9.22);$$

und bilde nun die Divisionen hieraus:

$$\frac{9}{7} = \frac{22.9}{22.7}$$

so fällt in die Augen, daß sich gleiche Exponenten ergeben. Es ist daher natürlich gewiß eine gültige Proportion vorhanden.

Auch noch auf andre Art läßt sich der Saz beweisen. Das Product der mittlern Glieder ist dem der äussern gleich

$$(9.154) = (7.198).$$

Diese Gleichung bleibt, wenn man durch eine Gröse zur rechten und zur linken zugleich dividirt. Diese Gröse werde aus den zwei lezten Gliedern der zuerst gegebenen Proportion

$$7 : 154 = 9 : 198$$

so genommen, daß man sie (hier also 9 und 198) als Factoren zusammensetze. Nehmlich man schreibe:

$$\frac{9.154}{9.198} = \frac{7.198}{9.198}.$$

dividire aber hierauf nicht wirklich, sondern sehe nur die Sätze an. Daß sie gültig überhaupt sind, daran ist gar nicht zu zweifeln, man müßte dann an der Aechtheit der Gleichung

chung ohne die gleichen Nenner *) zweifeln.

Nun führt aber eine leichte Betrachtung darauf, daß die Gleichung mit diesen Nennern bestehe, auch wenn man $\frac{9}{9}$ und $\frac{198}{198}$ weglasse; also

$\frac{154}{198}$ wird $= \frac{7}{9}$ seyn.

Folglich auch umgewendet: $\frac{9}{7} = \frac{198}{154}$.

Aus diesen zwei Brüchen folgt aber unleugbar (nach Nr. 1 dieses Paragraphen selbst) die Proportion:

$$7 : 9 = 154 : 198.$$

In dieser stehen nun die mittlern Glieder wirklich verwechselt, und nur die zwei äussern ungeändert. Die Behauptung ist also auch auf diesem Weg ins Reine gebracht.

5.) Es seien zwei geometrische Proportionen vorhanden, von welchen gar nicht bekannt sei, daß, oder wie sie einander angehen mögen; willkührlich gewählte Zahlen, die aber doch in 4 Gliedern zwei geom. Proportionen, (deren Grundeigenschaften gemäs) darstellen; z. B.

(I) 3 : 6 = 7 : 14. Expon. 2
(II) 5 : 30 = 4 : 24. Expon. 6

so läßt sich behaupten, daß, wenn die Producte von je zween Gliedern übereinander ver-

*) Nehmlich schon ohne diese gleiche Nenner ist 9.154 = 7.198 eine unbestreitbar richtige Gleichung. Sie beruht ja auf der zu allererst angenommenen Proportion.

glichen werden, sich jederzeit auch wieder eine geometrische Proportion zeige; nehmlich

3.5 : zu 6.30 = 7.4 : zu 14.24
oder 15 : zu 180 = 28 : zu 336.

Der Exponent der lezten Verhältnisse ist 12; und ist also dem Product der 2 Exponenten gleich, welche den zwei einzelnen Proportionen zukommen.

Der Beweis, daß die Multiplicationen zweier Proportionen durch einander allemal Glieder geben, welche wieder eine geom. Proportion formiren, beruht darauf:

1) Aus der Isten Prop. folgt:

$\frac{3}{6} = \frac{7}{14}$ (dem §. 55 gemäs)

Aus der IIten Proportion aber:

$\frac{5}{30} = \frac{4}{24}$.

2tens) Die erste dieser Gleichungen besteht, wenn man zur rechten und zur linken Hand mit $\frac{5}{30}$ multiplicirt; das ist: So gut die Gleichung statt hat,

$\frac{3}{6} = \frac{7}{14}$; so gut hat auch

$\frac{3}{6} \cdot \frac{5}{30} = \frac{7}{14} \cdot \frac{5}{30}$ statt.

Dieses folgt aus Nr. 3 des nächstvorhergehenden Blatts, auch aus mehrern Sätzen des ganzen Abschnitts.

3tens) Man erwäge, daß $\frac{5}{30}$ so viel, als $\frac{4}{24}$ sei; dieses ward erst vor 10 Zeilen (oben)

(oben) behauptet, und ist ganz der IIten einzelnen Proportion gemäs.

Daraus fliest aber ganz gewiß: So gut, als statt hat:

$\frac{3}{6} \cdot \frac{5}{30} = \frac{7}{14} \cdot \frac{5}{30}$; eben so gut muß auch $\frac{3}{6} \cdot \frac{5}{30} = \frac{7}{14} \cdot \frac{4}{24}$ gelten.

4tens) Da nun diese Gleichung kein Mensch bestreiten mag, so kann auch niemand die daraus zu formirende wirkliche Producte anfechten:

$\frac{15}{180} = \frac{28}{336}$.

So oft man aber eine Gleichung von 2 Brüchen so vor sich sieht, kann man ohne Zweifel geometrische Proportionen daraus bilden (nach Nr. 1 unsers §. selbst). Folglich muß auch hier die Bildung der Verhältnisse in nachfolgender Gestalt gar keinem Zweifel mehr ausgesezt seyn:

15 : 180 = 28 : 336.

Allein, siehe da! das sind eben die Zahlen, welche oben die mechanische Multiplication von je zwei und zwei Gliedern der zwei einzelnen Proportionen ausgegeben hat. Das Daseyn der Eigenschaften, welche geom. Proportionen zukommen, liegt den connectirten Sätzen gemäs, also evident am Tag. Es ist daher an der Richtigkeit der Behauptung selbst,

(über die der Beweis geführt worden,) gar nicht zu zweifeln.

6.) Trifft es sich, daß bei solchen Multiplicationen zweier geom. Proportionen die zwei lezte Glieder oben und unten gleiche Zahlen haben, die aber nicht vertical stehen, sondern die eine im 3ten, die andre im 4ten Glied; so verhalten sich die zwei übrige Zahlen, die noch verschieden sind, einzeln gegen einander, wie die zwei Producte der vordern Glieder: z. B. es käme vor

3 : 6 = 7 : 14

5 : 30 = 14 : 84

so ist: 3.5 : 6.30 = 7.14 : 14.84 nach Nr. 5.
d. i. 15 : 180 = 7 : 84.

Man darf nur nachlesen, was Nr. 3 steht, so wird man keine Bedenklichkeit gegen die Wahrheit dieser Behauptung weiter hegen können.

Der Lehrsaz selbst muß übrigens besonders wohl gemerkt werden. Wer ihn nicht faßt, wird niemals zu einer gründlichen Einsicht in der wichtigen Lehre von der Kettenregel gelangen, und überhaupt unsern IXten Abschnitt niemals verstehen lernen.

VIII. Abschnitt.

Ueber die Anwendung der nächstvorhergehenden Lehren zu Ausübung der Regel de Tri.

§. 59.

Die Regel de Tri hat ihre Benennung von den drei gegebenen Gliedern geometrischer Proportionen erhalten, zu welchen das 4te gesucht wird.

Die ältern Rechenmeister sprachen aber äusserst selten von Proportionen, und Gliedern; sondern nannten die leztern gewöhnlich Sätze; belegten auch das dritte Glied insbesondre gar häufig mit dem unschiklichen Namen

des hintern Satzes.

Sie gaben beinahe alle die Vorschrift:

„Wenn du nach dem Preis einer Waare „fragst, so kommt die Waare in den ersten und „in den hintern Saz; das Geld aber in den „mittlern. Z. B. ein Stab oder 2 Ellen kosten 7 Gulden; du fragst nach 23 Ellen; so „must setzen:

2 Ellen — 7 Gulden — 23 Ellen.

„Darnach must du 23 mit 7 multiplici„ren, und das Product mit 2 dividiren; so „erhältst du das wahre Facit, was die 23 El„len kosten:

23	2	161	$80\frac{1}{2}$ Gulden.
7		16	
161		1	

Nach und nach hat man einsehen gelernt, daß durch Belehrungen dieser Art gar keine Ueberzeugung in jungen Leuten hervorgebracht werden könne, welche ihnen bei der Arbeit selbst Befriedigung verschaffte. Man hat einsehen gelernt, daß bei Aufstellung der Sätze, die Combination und Vergleichung:

Waare zu Waare; Geld zu Geld;

gemacht, und daß allerdings vier Glieder neben einander geordnet werden müßten, von welchen zwei und zwei ein Verhältnis abgeben.

Wer den Werth von 2 Ellen kennt, und nach dem von 23 Ellen fragt, muß denken:

„Die Zahl der Ellen hat ein gewisses Ver„hältnis gegeneinander; es ist bestimmt in Zah„len:

2 zu 23; oder 2 : 23.

Die Geltung dafür besteht ebenfalls in Zahlen.

Diese Zahlen müssen eben dasselbe Verhält:

hältniß haben: Die Geltung für zwei Ellen und die Geltung für 23 Ellen, müssen gegen einander stehen, wie 2 gegen 23. Wer möchte wohl daran zweifeln? Welches andre Verhältniß sollten dann die zwei Geldwerthe haben? Aber von diesen zwei Geltungen ist nur die eine bekannt, 7, als der Werth für 2 Ellen; die zweite ist eben die, welche gesucht wird, welche die Rechnung entdecken soll. Ehe die Entdekung gemacht ist, setze man einstweilen nur ein willkührliches Zeichen hin, x oder y, oder eine Figur, ein △; blos, um setzen und sprechen zu zu können:

7 zu △ oder 7 : △

d. i. Geltung zu Geltung.

So steht das Verhältniß doch in der Form da! Es muß einen Exponenten haben; natürlich denselben, den 2 : 23 hat. Wie heißt dieser?

Er ist ein Bruch, und heißt $\frac{23}{2}$ oder $11\frac{1}{2}$.

Wegen der ausgemachten Gleichheit der Verhältnisse darf man allerdings schreiben:

$$\underset{(11\frac{1}{2})}{2 : 23} = \underset{(11\frac{1}{2})}{7 : \triangle}$$

Nun denke man sogleich: Das erste Glied, mit dem Exponenten multiplicirt, giebt das zweite Glied;

und

und das 3te Glied mit eben dem Exponenten multiplicirt, giebt das 4te.

Also 2.($11\frac{1}{2}$) giebt 23
und 7.($11\frac{1}{2}$) giebt △

Die Rechnung wird leichter, wenn man den Factor $11\frac{1}{2}$, durch $\frac{23}{2}$ ausgedrükt, wie im Anfang gestanden, beibehält. Denn da erkennt und sieht man, daß

2 mal $\frac{23}{2}$ das 2te Glied 23 selbst sei,

und 7 mal $\frac{23}{2}$ das 4te Glied, d.i. $\frac{7 \cdot 23}{2}$ oder $80\frac{1}{2}$.

Das lezte gesuchte Glied, die Geltung, welche unter dem Zeichen △ verdekt lag, ist also nun eine verständliche aufgedekte Zahl, und heißt: $\frac{161}{2}$ oder $80\frac{1}{2}$.

Es ist damit ganz offenbar, auf welche Art man nothwendig zu derselben gelangen mußte, vermittelst des Exponenten, welcher mit den zwei vordern Gliedern gegeben, d. i. durch sie verrathen war, ist man dazu gelangt; 2 : 23 waren gegeben; und diese Glieder verriethen den Exponenten: $\frac{23}{2}$.

Dieser, mit dem 3ten Glied multiplicirt, muß das lezte (4te) ausgeben. ($\frac{23}{2}$.7).

Alles das ist genau in §. 56 erklärt, und allgemein bewiesen worden. Aber sogleich darauf in §. 57 steht auch die Anweisung, wie man kürzer verfahren könne, und auf dasselbe

Re-

Resultat doch hinaus kommen müsse, wenn man nehmlich

„direct das 2te und 3te Glied mit einander „multiplicire, und das Product durchs erste „Glied dividire.

Die alten Rechenmeister mußten auf eben das, was in unserm lezten Gliede steht, hinauskommen, wenn sie gleich die mittlern Sätze umgewendet stellten, nehmlich das (bekannte) Geld vor dem Betrag der Waare, deren Gelung gesucht wurde. In der Operation kamen immer zwei Zahlen-Factoren zusammen, welche ein Product ausgeben mußten, man mochte den einen oder den andern als Multiplicator denken und annehmen. (Darüber sehe man S. 54 und S. 86 nach, und vollends dazu, was in Nr. 4 des §. 58 dargethan worden.)

§. 60. Ich kann es doch nicht umgehen, einen Einwurf herzusetzen, welcher gegen die erst gezeigte Ordnung, in welche die 4 Glieder zu stellen sind, von einigen Rechnern, die die alte Weise einmal lieben, und oft ohne Beruf vertheidigen, gemacht wird. Sie sprechen:

„Bei allen Fragen, welche durch die Re„gel de Tri beantwortet werden, spricht man „die gleichnamigten Dinge niemals neben ein„ander aus, sondern man trennt sie. So „mag man sie dann auch in Zahlen trennen.

„Zwei

„Zwei Ellen erfordern 7 Gulden! Damit hat „man 2 Zahlen 2 : 7. Nun erst kommt, wie „viel erfordern 23 Ellen? Also ist es natürlich, „daß auch 23 im Zahlen-Saz erst folge! Zu„mal, da die Rechnung um nichts weitläuffiger „wird, ob man sezt:

2 Ellen zu 7 Gulden, wie 23 Ellen zu $80\frac{1}{2}$ Gulden;

oder 2 Ellen zu 23 Ellen, wie 7 Gulden zu $80\frac{1}{2}$ Gulden!

Hierauf läßt sich kurz erwiedern; es ist dem Grundgesez des menschlichen Verstandes gemäs, blos gleichartige Dinge, als Zahl und Maas, vergleichen zu können. Jede Regel de Tri gründet sich aber auf zwei Verhältnissen, deren Vergleichung eben zum Ziel führt. In diese Verhältnisse ungleichartige (heterogene) Dinge zusammenzustellen, ist widersinnig, und hindert selbst die natürliche Vergleichung. Zwei Ellen und 7 Gulden machen kein Verhältniß zusammen, lassen sich nicht gegen einander stellen und betrachten; aber zwei Ellen und 23 Ellen gehören ganz ohne Zweifel zu einander; und alsdenn wieder 7 Gulden und $80\frac{1}{2}$ Gulden auf der Gegenseite. So vielmal 2 Ellen in 23 Ellen enthalten sind, so vielmal sind 7 Gulden in $80\frac{1}{2}$ Gulden enthalten. Das ist jedem vernehmlich, und diese Zusammenordnung führt recht eigentlich auf die Gröse des 2ten Verhältniß-Gliedes hin.

Nimmt

Nimmt man Beispiele, in welchen der Exponent eine ganze Zahl ist, so leuchtet dieser Weg der Vergleichung noch deutlicher ein.

(Auch werden in der Folge zusammengesezztere Fragen vorkommen, welche jeder Anfänger auf zwei Proportionen zurükzuführen hat; Die Vortheile der empfohlenen Stellung werden dabei noch weit einleuchtender erscheinen, als sie in den bisherigen Sätzen bemerklich gemacht werden konnten.)

Die Wendung der Sprache, in der man fragt, entscheidet für die Ordnung der Rechnung gar nichts. Darnach lassen sich keine Sätze stellen. Wenn die Behauptung statt fände, auf welche Rechnungs-Sätze (positiones calculi) käme man nicht vollends gar bei Fragen folgender Art hinaus;

3 Pferde kosten wochentlich 5 Gulden, wie viel kosten 17 Pferde in 6 Wochen?

Wir werden unten einsehen, wie sich die Verhältnisse rechtlich zusammen ordnen lassen, um solche Fragen zu beantworten, und überzeugt werden, daß der Vortrag der Sprache den Rechner gar nicht directe weder bindet, noch leitet.

§. 61. Im gemeinen Leben kommen keine Fälle *) häufiger vor, als die von Theilun-

*) Von hier an bis §. 71 folgende specielle Anwendungen der Regel de Tri auf besondre Geschäfte

lungen, da nehmlich ein gewisses Vermögen unter drei, vier, fünf Personen abzutheilen ist, oder auch eine Summe aufgelauffener Kosten, eine Zeche bei Zehrungen u. d. gl. als zum Beispiel: Die Zeche beträgt 34 Gulden, 51 Kr.; daran sollen 4 Personen zahlen; wie rechnet man den Antheil eines jeden aus?

In gar vielen alten Rechenbüchern werden die Rechnungen, welche dabei zu führen sind, sogleich in dem Capitel von Divisionen beigebracht, ehe nur noch ein Wort von Regel de

schäfte des menschlichen Lebens. Manche Leser werden diese Blätter nicht ohne Tadel vorüber gehen lassen. Geübte Rechner werden besonders den Gang den Calküls in den gewählten Beispielen zu schwerfällig finden, und Anweisungen zu compendiarischer Rechnungsweise vermissen.

Meine Absicht gieng aber einmal dahin, die Gründe des Verfahrens, welches man gewöhnlich blos mechanisch vorschreibt, in concreten Fällen so faßlich, wie nur möglich wäre, darzulegen. Darum gieng ich gar nicht so gleich auf Abkürzungen aus. Wenn man die vorgetragene Erläuterungen, insbesondre darüber, in wie ferne die angeführte Proportionen überall zum Grunde liegend angenommen werden müssen, gefaßt hat, so werden die verlangten Abkürzungen gewiß nicht ausbleiben. Ihre Rechtfertigung gründet sich fast allemal auf detaillirten Proportionen; das läßt sich von unbefangenen Rechnern gar nicht im Ernst widersprechen.

de Tri vorgekommen ist. Der Vortrag ist immer unmethodisch. Selbst in dem Fall, wenn z. B. die Zeche 32 Gulden betragen hätte, und auf 4 Personen auszuschlagen wäre, ist es räthlich dem Anfänger die Proportion hinzusetzen:

Mann zu Mann Geld zu Geld

4 zu 1 = 32 : $\frac{32 \cdot 1}{4}$.

Die zwei ersten Glieder enthalten die zechende Personen, die zwei lezten das Geld. Da steht gleichartiges bei gleichartigem, in zwei Verhältnissen, wie sichs gehört, beisammen.

Die Rechnung selbst wird freilich durch eine einfache Division vollführt; 4 liegt in 32 achtmal. Also 8 Gulden ist der Antheil an der Zeche für jede der 4 Personen.

Die Frage, wie der Antheil ausfalle, wenn die Zeche 34 Gulden, 15 Kreuzer beträgt, führt schon auf eine beschwerlichere Rechnung. Der Hauptsaz selbst aber ist immer gleichförmig zu stellen:

4 : zu 1 = 34 Guld. 15 Kr. : zu △

Das 3te Glied enthält zwei Geld-Sorten, Gulden und Kreuzer. Man muß den Betrag hievon umbilden, so, daß er ganz in Kreuzern aufgestellt werde. Hiezu ist in der Nähe betrachtet schon für sich ein Regel de Tri-Saz, oder besser eine besondre neu einzuschiebende Proportion nöthig: Man muß denken:

1 Gulden zu 34 Gulden, wie 60 Kreuzer zu ...
oder 1 : 34 = 60 : $\frac{34 \cdot 60}{1}$

Da ist wieder gleichartiges und gleichartiges zusammengeordnet; Gulden stehen bei Gulden, Kreuzer bei Kreuzern. Das lezte Glied ist: 2040; es ist schlechthin ein Product der 2 Factoren 34.60, weil der Divisor 1 nichts ändert.

Das sind nun Kreuzer. Jezt kann man fortzählen und addiren: 2040 + 15 Kreuzer, sind 2055 Kreuzer. So viel betragen 34 Gulden, 15 Kreuzer. Da dieß nun ausgemacht ist, so hat man die allererste Proportion jezt so zu schreiben:

$$4 : 1 = 2055 : \frac{2055 \cdot 1}{4}.$$

Hierauf erst ist Division vorzunehmen: Der Factor 1 im zweiten Glied macht keine Aenderung; Also

$\frac{2055}{4}$ ist $513 + \frac{3}{4}$.

So viel Kreuzer kämen auf jeden der 4 Personen; also daß man nun die Verhältnisse sich aussezen kann:

4 : zu 1 = 2055 : zu $513\frac{3}{4}$.

Weil aber im gemeinen Leben so viele Kreuzer herzuzählen zu beschwerlich fiele, so wird nöthig seyn, diesen Betrag in Gulden, etwa nur mit Ueberschuß etlicher Kreuzer, anzugeben. Gewöhnlich läßt man bei der Rechnung, welche vollends darüber geführt wird, die Brüche

von Kreuzern (hier $\frac{3}{4}$) weg, oder schreibt dafür einen ganzen Kreuzer weiter; also hier 514.

Die Frage geht demnach am Schluß dahin: 514 Kreuzer, wie viel sind dieß Gulden?

Das ergiebt sich abermals durch folgende Proportion:

60 Kr. : zu 514 Kr. = 1 Gulden : zu $\frac{514 \cdot 1}{60}$ G.

Die Division giebt: $(8 + \frac{34}{60})$ Gulden; das ist: 8 Gulden, und 34 Kreuzer. Denn $\frac{1}{60}$tel eines Guldens ist eben 1 Kreuzer; folglich $\frac{34}{60}$ müssen 34 Kreuzer betragen.

Hätte man blos 513 angenommen, so würde die Division natürlich nur 33 Kr. gegeben haben.

Denn: 60 : 513 = 1 : $\frac{513}{60}$ ist $8 + \frac{33}{60}$.

Und damit ist nun die vorgelegte Frage hinlänglich beantwortet, wie zum gemeinen Gebrauch erforderlich ist.

§. 62. Die Ausrechnung dieser Zeche geht aber kürzer von statten, wenn man folgendes erwägt:

Die Summe: 34 Gulden, 15 Kreuzer; welche zuerst sogleich genannt war, läßt sich denken, als

$(34 + \frac{1}{4})$ Gulden.

Denn 15 Kreuzer sind der 4te Theil von 60 Kreuzern, also von 1 Gulden. Man bringe $34 + \frac{1}{4}$ unter einen Nenner:

$\frac{4 \cdot 34 + 1}{4}$ ist $\frac{136 + 1}{4}$ oder $\frac{137}{4}$.

Und nun seze man die erste Proportion sogleich so:

$$4 : 1 = \frac{137}{4} : \frac{137 \cdot 1}{4 \cdot 4}.$$

Die Division 16 in 137 giebt $(8 + \frac{9}{16})$ Gulden. Denn die zwei lezten Glieder sind Gulden, blos in Bruchgestalt, weil die Kreuzer zu dem Bruch eines Guldens umgebildet worden, und 34 vorher Gulden waren.

Also 8 Gulden, und $\frac{9}{16}$ eines Gulden macht der Antheil an der Zeche für jeden aus. Wie viel $\frac{9}{16}$ in Kreuzern betrage, ist demnächst vollends die Frage.

Sie zu beantworten, erwäge man, daß $\frac{8}{16}$ eines Gulden $= \frac{1}{2}$ Gulden, das ist: 30 Kreuzer, wäre; und seze demnächst die Verhältnisse:

$$\frac{8}{16} \text{ zu } \frac{9}{16} = \text{wie } 30 \text{ Kr. zu } \frac{30 \cdot 9}{8}.$$

Denn die Nenner braucht man gar nicht mehr im lezten Glied zu schreiben, weil sie blos $\frac{16}{16}$ d. i. 1 zum Factoren ausgegeben haben würden; (dem §. 54 gemäs). Also ist blos zu multipliciren, und zu dividiren: $\frac{270}{8}$ giebt aus $(33 + \frac{6}{8})$ Kr. oder $33\frac{3}{4}$ Kreuzer; so daß nunmehr verständlich und ganz am Tag wäre, der

Antheil von $(8 + \frac{9}{16})$ Gulden betrüge
so viel, als 8 Gulden, $33\frac{3}{4}$ Kreuzer.

Man

Man gehe nun mit einem Blik, das gegenwärtige und das vorhergehende Blatt durch. Augenscheinlich ist hiemit ein doppelter Weg angezeigt, um zu einem Ziel zu gelangen. Auf dem lezten ist die Rechnung, in Rükſicht auf den hinzukommenden Kreuzer-Bruch schärfer geführt worden, als in den Sätzen des vorhergehenden Syhen, wo man zuerst die 34 Gulden in Kreuzer verwandeln mußte.

Inzwiſchen ist die in §. 61 gelehrte Weiſe, Gulden in Kreuzer zu verwandeln, die gewöhnlichſte, und auch in vielen Fällen allerdings brauchbar. Nur ist räthlich, sie mit Klugheit anzuwenden, und zu überlegen, ehe man darnach verfährt, ob sie nicht auf allzuhohe Zahlen führe: (auf viele Tauſende von Kreuzern). Sieht man dieſes voraus, so ist es billig, daß man darauf denke, wie sich das Geſchäft mit wenigern Zahlen durchführen laſſe?

Man nehme nochmals das Beiſpiel der Zeche vor die Hand. Wenn gefragt wird, wie theilen sich 4 in die 34 Gulden, 15 Kr.? so kann man auch den Betrag ſogleich in zwei Haupttheile zerlegen:

1) in einen, der ein vollkommenes Multiplum von 4 wäre, und an 34 am nächſten hingränzte. Ohne Mühe sieht man ein, daß dieß Multiplum 32 = 4.8 sei.

2) in den Ueberſchuß über dieſes Multiplum. Dieſer wäre da: 2 fl. 15 Kr. Man

denke denselben sogleich ganz in Kreuzern; er ist $120 + 15 = 135$. Nun ist das Geschäft sehr leicht; wenn gleich die Operation doppelt ist: Man hat zwei Proportionen:

$4 : 1 = 32 : 8$. Das sind Gulden,
$4 : 1 = 135 : \frac{135}{4}$. Das sind Kreuzer.

Der lezte Bruch beträgt $33\frac{3}{4}$ Kr. Wie die leichteste Division zeigt. Nun addirt man, und erkennt: 8 Gulden, $33\frac{3}{4}$ Kr. sei die Quote, welche man gesucht habe.

§. 63. Wenn man wohl überdenkt, wie in den zwei vorhergehenden Paragraphen auf drei Wegen ein Ziel erreicht worden, und den Gang der Rechnungen dabei wiederholt ansieht, so läßt sich bald der Schluß machen,

„daß sich nicht schlechthin allgemeine Vor„schriften geben lassen, welche Methode „vorzuziehen sei, um am kürzesten und „bequemsten zu rechnen.

So viel läßt sich aber immer behaupten, wenn die an den Gulden angehängten Kreuzer auf kleine Brüche führen, so ist der zweite Weg vorzuziehen, und die Kreuzer sind sogleich als Fragmente von Gulden den Gulden selbst anzufügen.

Die kleinsten Brüche, die hier gemeint sind, kommen vor, wenn vorgelegt werden, zum Beispiel:

14 Gulden, 30 Kreuzer.
Dafür setze man $14 + \frac{1}{2} = \frac{29}{2}$ Gulden.

Wenn

Wenn vorgelegt würden
14 Gulden, 20 Kreuzer.
Dafür sezze man $14 + \frac{1}{3} = \frac{43}{3}$ Gulden.
14 Gulden, 15 Kreuzer.
Dafür sezze man $14 + \frac{1}{4} = \frac{57}{4}$ Gulden.
Wenn vorgelegt würden
14 Gulden, 12 Kreuzer.
Dafür sezze man $14 + \frac{1}{5} = \frac{71}{5}$.

Ob aber auch bei andern Ueberschüssen in Kreuzern, diese Methode schlechthin zu befolgen wäre, möchte ich nicht allgemein behaupten; Denn wenn
vorgelegt würden,
14 Gulden, 50 Kreuzer;
ob man dazu sezzen solle: $14 + \frac{5}{6}$.
wofür sodann erst $\frac{6 \cdot 14 + 5}{6} = \frac{84 + 5}{6}$ zu berechnen wäre; dieses läßt sich nicht durchgehends bejahen. Oefters wird auf das 1ste und zweite Glied Rüksicht zu nehmen seyn, nehmlich darauf, ob die Zahlen in diesen Gliedern vermuthen lassen, daß die Rechnung einfacher werden möchte, weil sich beim weitern Verfahren gerade ein Bruch ganz oder zum Theil doch etwa hebt.

Z. B. Es würde gefragt:
1 Pfund gilt 14 Gulden, 50 Kreuzer; was gelten 6 Pfunde?

Da wäre der Saz am kürzesten so zu fassen:
$1 : 6 = 14 + \frac{5}{6} : x$
oder $1 : 6 = \frac{84 + 5}{6} : 89 \cdot \frac{6}{6}$

Das lezte Glied ist hier ohne Bruch 89, weil $\frac{6}{6} = 1$ beträgt, und von dem geübten Rechner gar nicht mehr in dem lezten Glied, als Factor eingeschrieben wird.

In diesem Fall hätten allerdings mehr Zahlen geschrieben werden müssen, wenn man die Gulden erst in Kreuzer hätte umwandeln wollen. Man hätte setzen müssen:

14 Gulden
mult. mit 60.

giebt: 840 Dazu 50 gethan, giebt 890

Das sind Kreuzer. Nun erst würde geschrieben werden:

1 : 6 = 890 : 890.6.

Das Product ist 5340. Das sind wieder Kreuzer. Man dividire sie durch 60. Der Quotient: $\frac{5340}{60}$ giebt 89 aus.

Wer sieht nicht ein, daß dieses doppelte Arbeit sei, gegen das Verfahren gehalten? wenn man $14 + \frac{5}{6}$ unter einen Nenner bringt. Käme aber ein Beispiel vor, wie folgendes:

„24 Maas Wein kommen auf 14 Gul„den, 50 Krz.; wie hoch kommen 17 Maas?"

so hebt sich in diesem Fall freilich nichts im dritten Glied, insoferne die Proportion geschrieben würde:

$$24 : 17 = 14 + \frac{5}{6} : x$$

$$24 : 17 = \frac{89}{6} : \frac{89 . 17}{24 . 6}.$$

Das

Das lezte Glied hat da 1513 zum Zähler, und 144 zum Nenner. Die Division giebt $(10 + \frac{73}{144})$ Gulden. So viel kosten die 17 Maas.

Nach der Methode, da man Gulden in Kreuzer verwandelt, erhält man dagegen zu berechnen:

$$24 : 17 = 890 : \frac{17 \cdot 890}{24}.$$

Allerdings ist 24 ein viel bequemerer Divisor, als 144; Der Quotient $\frac{15130}{24} = 630\frac{10}{24}$ giebt zwar eine grose Zahl von Kreuzern an; allein jeder Geldrechner, der nur einige Uebung hat, denkt bei 600 Kreuzern: (60.10), das sind 10 Gulden; und sieht damit sogleich den Ueberschuß von $30\frac{10}{24}$ Kreuzern vor Augen. Der kleine Bruch $\frac{10}{24}$ reicht sehr nahe an einen halben Kreuzer hin, weil $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ beträgt. Dieses alles läßt sich gar bald beinahe mit einem Blik übersehen, so daß der Rechner sogleich für den Quotienten

$630\frac{10}{24}$ hinsezt: 10 Gulden, $30\frac{1}{2}$ Kreuzer.

Die Arbeit 1513 durch den grosen Divisor 144 zu dividiren, ist ganz gewiß beschwerlicher. Alsdenn erfordert auch der Quotient: $(10 + \frac{73}{144})$ mehr Nachdenken und Nacharbeit. Denn die 10 Gulden stehen damit zwar sogleich auf dem Papier. Aber der angehängte Bruch hält erst noch (wegen der Reduction auf Kreuzer) von neuem weiter auf. Wem

freilich recht bald einfällt, daß $\frac{72}{144}$ gerade $\frac{1}{2}$ betrage, der hat, um zum Schluß zu kommen, blos vollends $\frac{1}{144}$ vor sich, gleich, als ob stünde $\frac{72+1}{144}$. Allein über den kleinen Bruch entsteht dann ja wohl wieder neues Nachdenken; welches doch immer aufhält, wenn gleich das Räthsel nicht gros ist.

Noch beschwerlicher wird die Rechnung, wenn das erste Glied eine grössere, oder weniger theilbare Zahl, als 24 ist. Wer inzwischen nach der 2ten Methode zu rechnen sich angewöhnen will, wird den Nutzen nachfolgender Bemerkungen, welche in einem besondern Paragraph beisammen stehen mögen, bald genug erkennen:

§. 64. Der 8te Theil eines Kreuzers ist $\frac{1}{480}$tel eines Guldens; und heißt (im Reich) ein Heller.

Das Doppelte oder zwei Heller beträgt einen Pfenning. Ein Pfenning ist daher $\frac{1}{240}$tel eines Guldens.

Zwei Pfennige oder ein halber Kreuzer ist $\frac{1}{120}$tel eines Guldens.

Nun gehe man auf Brüche, deren Nenner unter 100 liegen, und merke sich vorzüglich folgende:

$\frac{1}{80}$tel eines Guldens beträgt drei Pfennige, oder $\frac{3}{4}$tel eines Kreuzers.

$\frac{1}{60}$ ist ein Kreuzer, oder 4 Pfennige.

$\frac{1}{48}$tel

$\frac{1}{48}$tel eines Guldens ist so viel, als $1\frac{1}{4}$ Kreuzer, oder 5 Pfenn.
$\frac{1}{40}$ . . . ist . . . $1\frac{1}{2}$ Kreuz. od. 6 Pfenn.
$\frac{1}{30}$ . . . ist . . . 2 Kreuz.
$\frac{1}{24}$ . . . ist . . . $2\frac{1}{2}$ Kreuz.
$\frac{1}{20}$ . . . ist . . . 3 Kreuz.
$\frac{1}{16}$ . . . ist . . . $3\frac{3}{4}$ Kreuz.
$\frac{1}{15}$ . . . ist . . . 4 Kreuz.
$\frac{3}{40}$ . . . ist . . . $4\frac{1}{2}$ Kreuz.
$\frac{1}{12}$ . . . ist . . . 5 Kreuz.
$\frac{1}{10}$ . . . ist . . . 6 Kreuz.
$\frac{1}{9}$ . . . ist . . . $6\frac{2}{3}$ Kreuz. *)
$\frac{1}{8}$ . . . ist . . . $7\frac{1}{2}$ Kreuz.
$\frac{2}{15}$ . . . ist . . . 8 Kreuz.
$\frac{1}{7}$ . . . ist . . . $8\frac{4}{7}$ Kreuz. **)
$\frac{3}{20}$ . . . ist . . . 9 Kreuz.
$\frac{1}{6}$ . . . ist . . . 10 Kreuz.
$\frac{7}{40}$ . . . ist . . . $10\frac{1}{2}$ Kreuz.
$\frac{3}{16}$ . . . ist . . . $11\frac{1}{4}$ Kreuz.
$\frac{1}{5}$ . . . ist . . . 12 Kreuz.

Die

*) Es mag räthlich seyn, sogleich dazu zu sezen: daß $6\frac{2}{3}$ Kreuz. so viel, als 6 Kreuz. 2 Pfenn. $1\frac{1}{3}$ Heller betragen. So viel ist also $\frac{1}{9}$ fl.

**) Aber $8\frac{4}{7}$ Kreuz. sind = 8 Kreuz. $2\frac{2}{7}$ Pfenn. So viel ist also $\frac{1}{7}$ fl.

Die übrige Brüche von 12 Kreuzer bis 60 kann sich nun jeder selbst heraus setzen, z. B. die Multipla von $\frac{1}{48}$, von $\frac{1}{40}$ u. s. w. Ich erwähne blos folgende noch nahmentlich, welche am meisten vorkommen:

$\frac{5}{24}$tel eines Guld.	ist =	$12\frac{1}{2}$	Kreuz.
$\frac{7}{30}$		14	Kreuz.
$\frac{1}{4}$		15	Kreuz.
$\frac{7}{24}$		$15\frac{1}{2}$	Kreuz.
$\frac{3}{10}$		18	Kreuz.
$\frac{5}{16}$		$18\frac{3}{4}$	Kreuz.
$\frac{1}{3}$		20	Kreuz.
$\frac{7}{20}$		21	Kreuz.
$\frac{3}{8}$		$22\frac{1}{2}$	Kreuz.
$\frac{5}{12}$		25	Kreuz.
$\frac{7}{16}$		$26\frac{1}{4}$	Kreuz.
$\frac{7}{15}$		28	Kreuz.
$\frac{8}{15}$		32	Kreuz.
$\frac{11}{20}$		33	Kreuz.
$\frac{9}{16}$		$33\frac{1}{4}$	Kreuz.
$\frac{7}{12}$		35	Kreuz.
$\frac{3}{5}$		36	Kreuz.
$\frac{5}{8}$		$37\frac{1}{2}$	Kreuz.
$\frac{13}{20}$		39	Kreuz.
$\frac{2}{3}$		40	Kreuz.
$\frac{11}{16}$		$41\frac{1}{4}$	Kreuz.

$\frac{7}{10}$tel eines Guld.	ist	=	42	Kreuz.
$\frac{11}{15}$			44	Kreuz.
$\frac{3}{4}$			45	Kreuz.
$\frac{4}{5}$			48	Kreuz.
$\frac{5}{6}$			50	Kreuz.
$\frac{7}{8}$			$52\frac{1}{2}$	Kreuz.
$\frac{9}{10}$			54	Kreuz.
$\frac{11}{12}$			55	Kreuz.
$\frac{15}{16}$			$56\frac{1}{4}$	Kreuz.
$\frac{23}{24}$			$57\frac{1}{2}$	Kreuz.

Wer viel mit Gulden und Kreuzern zu rechnen hat, der wird sehr wohl thun, wenn er ein Blättchen, das diese Brüche enthält, sich ausschreibt, und beim Calculiren zur Seite legt. Ein schneller Blik darein wird ihm Belehrung über unzählige Zweifel und Anstände geben, und er wird nach und nach wohl selbst den Gehalt der Brüche, d. i. ihre Beziehung auf Gulden, in den Kopf bekommen, (ohne die Reihe derselben mit Anstrengung gerade auswendig lernen zu müssen,) wodurch er sich in ausserordentlich vielen Fällen aufs leichteste zu helfen wissen wird, wo andre Rechner erst zwei oder gar dreifache Reductionen vorzunehmen nöthig haben.

Um das Beispiel, welches S. 170 steht, weil es uns noch nahe liegt, doch sogleich hier noch einmal zu benützen; so wird dem, der den Bruch

$\frac{1}{144}$tel eines Guldens vor sich sieht,

der Gehalt desselben am leichtesten einfallen, wenn er sich nur erinnert, daß 144 = 12mal 12 sei. Auf dem Blättchen S. 171 sieht er nun

$\frac{1}{12}$ Gulden ist = 5 Kreuzer.

Also $\frac{1}{12 \cdot 12}$ d. i. $\frac{1}{144}$ muß = $\frac{5}{12}$ Kreuzer seyn.

So ist die Berechnung in einem Augenblik scharf geführt.

Die Reihe dieser Brüche wird aber in viel verwickeltern Fällen noch Licht, und schnelle Auskunft geben, wie jeden gar viele Erfahrungen bald hievon überzeugen werden. *)

§. 65. Die Geschäfte des bürgerlichen Lebens alle durchzugehen, bei welchen Regel de Tri sich anwenden läßt, würde das vorliegende Buch

*) Die Reductionen bestimmter Geldwerthe gehören an sich nicht unmittelbar in die Lehre von der Regel de Tri überhaupt. Allein ihre Bekanntschaft dient doch dazu, Regel de Tri-Sätze abzukürzen, und deren Vervielfältigung vorzubeugen. Ausserdem enthalten die allermeisten Rechenbücher in den Capiteln, welche von der Regel de Tri handeln, eben solche Anwendungen auf Geld-Sorten-Umbildungen, so daß man einmal ein solches Detail eben hier zu suchen pflegt, und sehr viele junge und alte Arithmetiker diesem Abschnitt gewiß den gehörigen sogenannten praktischen Werth absprechen würden, wenn die Anzeigen der speciellen Behandlungsweise, welche das vorhergehende, wie auch das nachfolgende Blatt enthält, gar weggelassen worden wären.

Buch auf viele Bögen weiter ausdehnen, als sich dessen Gröse erstrecken soll. Blos noch einiger wichtigen Anwendungen kann daher (bei dem vorgesteckten engen Raum) Erwähnung gethan werden.

Verschiedene Geldsorten mit einander zu vergleichen, angegebene Summen von der einen in Summen einer andern zu reduciren, läßt sich sehr oft durch einfache Regel de Tri bewerkstelligen. Die am meisten vorkommende

Reduction der Gulden auf Thaler und umgewendet;

beruht auf einem einzigen Proportions-Saz: Man weis 3 Gulden sind 2 Rthlrn gleich, und schliest daher, z. E. wenn gefragt wird, wie viel betragen 55 Thaler, so:

2 Thlr. zu 55 Thlr. = wie 3 Guld. zu $\frac{55 \cdot 3}{2}$.

Das lezte Glied ist $\frac{165}{2}$ oder $82\frac{1}{2}$ Gulden.

Umgekehrt, wenn gefragt würde: 33 Gulden, 36 Kreuzer, wie viel sind diese Thaler? müßte man seßen:

3 zu $(33 + \frac{3}{5})$ = 2 : zu .....

$3 : \frac{168}{5} = 2 : \frac{168 \cdot 2}{3 \cdot 5}$.

Das lezte Glied beträgt $\frac{56 \cdot 2}{5}$, oder $22\frac{2}{5}$ Thaler. Der geübte Rechner sieht sogleich, daß 168 sich durch 3 ohne Rest dividiren läßt, oder daß $168 = 3 \cdot 56$ sei. Diese Zerfällung dient

ihm

ihm dazu, daß er zu einem viel bequemern Divisor gelangt. Nehmlich ohne dieselbe hätte er dividiren müssen:

(336 : 15); aber jezt (112 : 5).

Ein Divisor von einer Zifer giebt allemal ein viel leichteres Geschäft, als einer mit zwei; das bedarf keines besondern Beweises.

Was aber der Quotient $22\frac{2}{5}$ endlich selbst in Thalern, den Bruch dazu genommen, betrage, erfährt man durch die Betrachtung, daß 90 Kreuzer einen Thaler ausmachen, und daher abermals ein Regel de Tri Saz den Betrag des Bruchs in Kreuzern, auswerfen müsse. Man schreibt deshalb

$$1 \text{ Thlr. zu } \tfrac{2}{5} \text{ Thlr.} = \text{wie } 90 : \text{zu } \frac{90 \cdot 2}{5}.$$

Die Zahl 90 ist = 5 . 18. Durch diese Zerfällung in Factoren hebt sich der Bruch ganz, weil (5 . 18 . 2) : (5) = (18 . 2) oder 36 ist. Und damit ersieht man, daß $\frac{2}{5}$ Thlr. = 36 Kreuz. betragen. Wem nicht sogleich einfiele, daß 90 in die zwei Factoren sich zerfällen läßt, der muß freilich zuerst multipliciren; 2mal 90 giebt 180; dividirt durch 5, giebt den Quotienten 36. Aus dem Schluß:

33 Gulden, 36 Kreuz. betragen 22 Thlr., 36 Kr.

ersieht man, daß sich bei dieser Reduction die Zahl der Kreuzer gar nicht geändert habe. Dieser Fall kann blos eintreffen, wenn die ganzen

Gul-

Gulden, und die ganzen Thaler sich direct, wie 2 zu 3 verhalten. Wirklich steht ja

22 : zu 33 = wie 2 zu 3.

Und hieraus erhellet, daß einige Reductionen gar nicht die Bearbeitung nöthig haben, wie andre. Der geübte Rechner würde wahrscheinlich, wenn ihm dieser Fall vorgelegt worden, gar nicht so umständlich gerechnet haben; Er hätte, aus der Betrachtung der vorgelegten Zahl 33 allein, schon geschlossen, der Anhang der 33 Kreuzer könne sich nicht ändern, und also wohl, (wenn er ja die Feder angesezt hätte) blos geschrieben:

3 zu 33 = wie 2 : zu 22,

und der Schluß hätte nicht fehlen können.

Reduction des Gelds im 24 Gulden Fus auf Geld in 20 Gulden Fus.

§. 66. Im Reich gelten 24 Gulden so viel, als in Sachsen (eigentlich in Obersachsen) 20 Gulden. Der Gulden wird dort zu 16 (guten) Groschen gerechnet; der Thaler zu 24. Der Betrag des Guldens und der des Thalers weichen also auch in Sachsen nicht von der Verhältnis 2 zu 3 (unter sich) ab. Denn die Proportion

16 : 24 = (2.8) : (3.8)

zeigt dieses deutlich. Man rechnet aber in Sachsen mehr nach Thalern, als nach Gulden. Im Reich rechnet man häuffiger umgewendet.

Dieses vorausgesezt, werde nun die Frage aufgeworfen: Wie viel betragen 2 Gulden, 45 Kreuzer Reichsgeld im Sächsischen, oder in Geld nach dem 20 Gulden Fus. (Wir wollen das leztere kurz hier Sächsisches Geld nennen).

Die Antwort ergiebt sich so:

$$24 \text{ zu } (2+\tfrac{3}{4}) = 20 : (\tfrac{20}{24} \cdot \tfrac{11}{4}).$$

Die Verhältnis-Zahl (24 : 20) läßt sich durchgehends kürzer (6 : 5) schreiben; daher das lezte Glied der Proportion, so viel als $\frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 4}$ betragen muß. In diesen Factoren läßt sich nun nichts weiter aufheben. Man rechnet also direct: 55 div. durch 24; der Quot. ist $(2+\frac{7}{24})$; Und ersieht also hiermit, daß 2 Gulden, 45 Kreuz. so viel als 2 Sächsische Gulden, mit einem Bruch von $\frac{7}{24}$ Gulden betragen.

Um zu erfahren, wie viel dieses in Thalern und Groschen betrage, mag man wohl die Proportion noch aufstellen:

$$3 : (2+\tfrac{7}{24}) = 2 : (\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{55}{24}).$$

Sächs. Gulden Sächs. Thaler.

Das lezte Glied ist $= \frac{55}{3 \cdot 12}$ oder $\frac{55}{36}$; und unleugbar ist dieß so viel als $(1+\frac{19}{36})$ Thaler. Hieraus ersieht man dann, daß die 2 Gulden, 45 Kr. wohl $1\frac{19}{36}$ Sächs. Thaler betragen; Allein der Bruch giebt wieder den Betrag noch nicht deutlich genug an. Wie viel sind $\frac{19}{36}$ Thlr.

gute

in guten Groschen? Eine neue Proportion zeigt dieses endlich an:

$$1 : \text{zu } \tfrac{19}{36} = 24 \text{ Gr.} : \text{zu } \tfrac{19 \cdot 24}{36} \text{ Gr.}$$

oder $\frac{19 \cdot 2}{3}$ d. i. $\frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$ Groschen ist der Betrag des Bruchs. Folglich ist nun am Tage, daß

2 Gulden 45 Kreuzer Reichsgeld (nach d. 24 Guld. F.) so viel als 1 Thaler $12\frac{2}{3}$ Groschen in Sachsen

betragen. (In einigen Provinzen Sachsens wird auf 1 Thaler 13 Gr. in andern auf 1 Thaler 12 Groschen, ohne Bruch, gerechnet.)

Ein geringes Nachdenken zeigt, daß hiebei die Rechnung sich um ziemlich viele Zahlen hätte abkürzen *) lassen, wenn man in der vorlezten Proportion anstatt des 3ten Gliedes (2) sogleich (2.24) eingesezt hätte, nehmlich sogleich 48 Groschen gedacht, und also unmittelbar nach Groschen gefragt hätte. Da würde die Rechnung so von statten gegangen seyn.

$$3 : (2 + \tfrac{7}{24}) = 2.24 : \tfrac{2 \cdot 24}{3} \cdot \tfrac{55}{24}.$$

Hier hebt sich 24 unmittelbar. Also bleibt: $\frac{110}{3}$ zu berechnen, das ist: $(36 + \frac{2}{3})$. Der Schluß, daß dieser Betrag so viel als

*) Die Abkürzungen, welche die Anwendung der Kettenregel gewährt, können hier noch nicht beigebracht werden. Sie sollen weiter unten gezeigt werden.

$(24 + 12 + \frac{2}{3})$ d. i. = 1 Thal. $12\frac{2}{3}$ Groschen sei, ist nun vollends gar leicht.

Unmittelbar verwandelt man Geld des 24 Gulden Fußes, die in Gulden ausgedrukt stehen, in Sächsische Thaler, durch Anwendung der Verhältnis-Zahlen 5 : 9. Nehmlich 9 Reichsgulden nach dem 24 Gulden Fus sind 6 Reichsthalern nach diesem Fus gleich. Aber 6 Reichsthaler nach 24 G. F. betragen 5 Thaler nach dem 20 Gulden-Fus. Also 5 Sächs. Thaler sind = 9 Gulden im Reich.

Man kann daher direct sezen:

$$9 : (2 + \tfrac{3}{4}) = 5 : (\tfrac{5}{9} : \tfrac{11}{4})$$

Reichs-Gulden Sächs. Thaler.

Das lezte Glied giebt sogleich $\frac{55}{36} = 1\frac{19}{36}$ Sächs. Thal. eben den Betrag, den wir schon kennen.

Gesezt, es würde gefragt: Die Carolin gilt im Reich 11 Gulden, was kann sie in Ober-Sachsen nach dem 20 G. F. betragen? so kann man schreiben:

$$9 : 11 = 5 : \frac{5 \cdot 11}{9}$$

Reichs-Gulden Sächs. Thal.

Da sind $\frac{55}{9} = 6\frac{1}{9}$ Sächs. Thl. Der Bruch ergiebt sich in guten Groschen so:

$$1 : \tfrac{1}{9} = 24 : \tfrac{24}{9} \text{ od. } \tfrac{8}{3}.$$

Das beträgt: $(2 + \frac{2}{3})$ Groschen. Also 6 Thaler $2\frac{2}{3}$ Groschen sind einer Carolin darnach

nach gleich. Der Werth im gemeinen Leben geht oft auf 6 Thal. 3 bis 6 Groschen (in Ob. Sachsen)

Reduction des Frankfurter Wechsel-Gelds in Geld nach dem 20 Gulden Fus.

§. 67. Frankfurter Wechselthaler sind Sächsischen Thalern des 20 Guldenfußes nicht ganz gleich, obwohl der Unterschied (in kleinen Summen) gar nicht viel beträgt.

Eine Carolin beträgt im 20 Gulden-Fus, wie wir erst gesehen haben, $6\frac{1}{9}$ Sächsische Thaler.

Ebendieselbe beträgt im Frankfurter Wechselfus $6\frac{2}{15}$ Thaler, schwer Geld, oder so viel Frankf. Wechselthaler.

Das Verhältnis von Frankf. Wechselthalern zu Sächs. Thalern des 20 G. Fußes, wird daher durch die zwei Werthe angezeigt:

$$6\frac{1}{9} : 6\frac{2}{15}.$$

Um ein Verhältnis in ganzen Zahlen zu bekommen, bringe man diese 2 Grösen unter einen Nenner:

$$\frac{55}{9} : \frac{92}{15} = \left(\frac{55.15}{9.15}\right) : \left(\frac{92.9}{9.15}\right).$$

Die Zähler heissen 825 : 828. In kleinern Zahlen *) besteht das nehmliche Ver-

*) Man stelle nur die Zähler in 2 Factoren dar: (55.15) : (92.9), ist so viel, als (55.3.5): (92.3.3) das ist (55.5) : (92.3), da 3 zweimal als Factor steht.

hältnis in 275 : 276. Und damit ist eben angezeigt:

275 Sächs. Thaler (nach dem 20 G. Fus) seien ebensoviel, als 276 Frankf. Wechselthaler.

In noch kleinern Zahlen kommt man allemal auf Brüche, wenigstens bei der einen Zahl. Denn natürlich sind auch, wenn man die Helften dieser Zahlen nimmt,

$137\frac{1}{2}$ Sächs. Thaler, so viel, als 138 Frankf. Wechsel-Thlr. wie auch weiter

$68\frac{3}{4}$ Sächs. Thal. = 69 Frankft. Thlr.
auch $13\frac{3}{4}$ . . . . = $13\frac{4}{5}$ Frankft. Thlr.

Aber ganze Zahlen sind blos 275 und 276; und diese müssen es bleiben, weil sie keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Es ist räthlich, daß man sich dieselbe nebst den einzelnen (wenn gleich verschiedenen) Factoren, aus denen sie bestehen, wohl merke. Denn, wenn z. B. gefragt wird, wie viel betragen 440 Sächs. Thal. in Frankf. Wechsel-Geld, so ist der Saz zuerst wohl dieser:

$$275 : 440 = 276 : \triangle$$

Dafür aber setze sogleich

$$(11.25) : (11.40) = 276 : \triangle$$

und dafür, weil sich (11 : 11) ganz hebt, und (25 : 40) doch zum Theil hebt:

$$5 : 8 = 276 : \frac{276.8}{5}.$$

Der

Der lezte Bruch ist $441\frac{3}{5}$. Wer sieht nicht ein, daß man mit weit mehr Mühe zu diesem Resultat gekommen wäre, wenn man directe (440 . 276) hätte multipliciren, und dann erst durch 275 hätte dividiren müssen? Die Kenntniß der Factoren hat also hiebei ein Geschäft von vielen Zahlen erspart.

Reduction des Frankf. Wechsel-Geldes in Geld nach dem 24 Gulden-Fus.

§. 68. Auch beim Frankfurt. Wechselgeld wird nicht blos nach Thalern, sondern auch nach Gulden gerechnet. Der Frankfurter Wechselthaler verhält sich zum Frankf. Wechselgulden, ebenfalls wie 2 zu 3.

Im Eingang des vor. §. ist vorgekommen: Eine Carolin würde $6\frac{2}{15}$ Frankf. Wechs. Thal. gleich geachtet. Wie viel sind dieses Fr. Wechsel-Gulden? Man rechne

$$2 : 6\tfrac{2}{15} = 3 : (\tfrac{92}{15} \cdot \tfrac{3}{2})$$

Wechs. Thaler = Wechs. Gulden.

Der lezte Bruch ist so viel, als $\frac{46}{5}$ oder $9\frac{1}{5}$ Gulden.

Eine Carolin beträgt also darnach so viel, als $9\frac{1}{5}$ Frankf. Wechselgulden.

Eben die Carolin beträgt aber im 24 Gulden Fus 11 Reichs-Gulden. Man sieht also wohl ein, daß die Zahlen:

$9\frac{1}{5} : 11$ oder $\frac{46}{5} : \frac{55}{5}$

das Verhältnis angeben, in welchem Frankfurter Wechselgeld gegen Reichsgeld nach dem 24 Guldenfus steht.

Die Zahl 11 ist durch $\frac{55}{5}$ dargestellt, um gegen $\frac{46}{5}$ einen gleichen Nenner zu erhalten, und hiernächst aus diesen zwei Brüchen die Folge ziehen zu können: „In ganzen Zahlen verhal„ten sich

„Frankfurter Wechselgulden gegen Reichs„gulden des 24 G. Fußes, wie 46 zu 55."

Diese Zahlen muß man wohl behalten, weil in unzähligen Fällen mit denselben gerechnet werden muß. Kein Kaufmann im Reich kann die Frage entbehren: „wie viel betragen „100 Gulden des 24 G. Fußes in Frankfurter „Wechselgulden?" Er muß setzen:

$$55 : 100 = 46 : \frac{4600}{55}.$$

Der lezte Bruch kann $\frac{46 \cdot 20}{11}$ geschrieben werden, weil (100 : 55) so viel (5.20 : 5.11) beträgt, und sich 5 da hebt. Die Rechnung darauf hin giebt den Quotienten $83\frac{7}{11}$. So viel Frankf. Wechsel-Gulden sind also das Aequivalent von 100 Reichsgulden nach dem 24 G. F.

Die umgekehrte Frage: Wie viel Reichs-Geld nach diesem Fus wird zu 100 Frankf. Wechselgulden erfordert, wird so beantwortet:

$$46 : 100 = 55 : \frac{5500}{46}.$$

Das

Das lezte Glied ist auch $\frac{2750}{23}$ zu schreiben; und dieser Quotient beträgt: $119\frac{13}{23}$ Reichsgulden nach dem 24 G. Fus.

Der beschwerliche Bruch $\frac{13}{23}$ muß durch Hülfe einer zwoten Proportion in Kreuzern dargestellt werden:

$$\frac{1}{60} : \frac{13}{23} = 1 \text{ Kreuz.} : \text{zu } \frac{13.60}{23}$$

Die Berechnung des Bruchs im 4ten Glied giebt: $33\frac{21}{23}$ Kreuzer; dafür man wohl $33\frac{7}{8}$, oder auch $33\frac{9}{10}$ Kreuzer setzen darf; so, daß diesem allem nach

119 Gulden, $33\frac{9}{10}$ Kreuzer im 24 G. Fus dem Betrag von 100 Frankfurt. Wechsel-Gulden

gleich zu setzen wären.

Anmerkung.

über die §. §. 64 . . . . 68.

Es wird weiter unten, wenn die Lehre von Decimal-Rechnung vorgetragen worden, gezeigt werden, wie vortheilhaft man diese Rechnungsweise anwenden könne, um insbesondere sehr bald jederzeit zu ersehen, wohin der Werth selten-vorkommender groser und kleiner Brüche, welche an ganzen Gulden und Thalern hängen, falle.

Ueber Reductionen verschiedener Gewichte auf einander wechselsweise.

§. 69. Wenn man von allem, was Gewicht heißt, genau und umständlich handeln

Der Buchbinder hat dieses Blatt zu S. 185. 186 Text

will, so ist nöthig, folgende 5 Gattungen ohne Ausnahme durchzugehen:

1) Das Mark- oder Münzgewicht; auch Valvations-Gewicht genannt.

2) Das Kommerz- oder Handels-Gewicht.

3) Das Ducaten-Gewicht, (das beim Goldabwägen gebraucht wird.)

4) Das Juwelen-Gewicht.

5) Das Apotheker-Gewicht.

Wer aber zur Genüge hierüber belehrt seyn will, muß abgesonderte Abhandlungen und Bücher, die ganz diesen Erörterungen gewidmet sind, sich anschaffen. Auf diesen Blättern können blos einige Beispiele von Gewicht-Reductionen angeführt werden, welche über die Bildung der Rechnungs-Sätze Anfängern Unterricht ertheilen mögen.

Gesezt: es wüßte jemand, 100 Nürnb. Pfunde seien 110 Leipziger Pfunden gleich zu achten, und fragte, wie viel betragen $= 1\frac{1}{4}$ Pfund Nürnb. Gew. in Leipziger Pfunden? Derselbe hätte zu schreiben:

$$100 : 1\frac{1}{4} = 110 : (\tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{11}{10}).$$

Das lezte Glied läßt sich unmittelbar so setzen, weil $\frac{110}{100}$ gewiß soviel $\frac{11}{10}$, und $1\frac{1}{4}$ gewiß $= \frac{5}{4}$ sind. Aber auch in den zwei Brüchen des lezten Glieds heben sich (5 : 10) auf $\frac{1}{2}$; und also beträgt dieses ganze Glied $= \frac{11}{4.2}$

oder

oder $\frac{11}{8}$; d. i. $1\frac{3}{8}$. So viel Leipz. Pfunde sind demnach $1\frac{1}{4}$ Nürnberg. Pfunden gleich.

Gesezt: es wüßte jemand, 108 Pfund zu Frankf. seien 100 Pfunden in Stuttgart gleich, und sollte angeben, wie viel 1 ℔ 23 Loth Frankf. Gewicht in Stuttgart betragen würden? derselbe hätte schon mehr Arbeit; Er müßte sezen:

$$108\ ℔ : (1\ ℔\ 23\ ℒ.) = 100 : \Delta$$

$$4 \cdot 27 : \frac{55}{32} = 4 \cdot 25 : (\frac{55}{32} \cdot \frac{25}{27}.)$$

In den 2 Brüchen des lezten Glieds läßt sich nichts weiter aufheben; daher ist blos zu multipliciren, und zu dividiren:

$\frac{1375}{864}$ giebt: $(1 + \frac{511}{864})$ Pfund.

Der Bruch an dem Pfund muß in Lothen ausgedrükt werden, da man ihn selbst nicht (weder auf $\frac{1}{2}$, noch auf $\frac{3}{4}$ Pfund noch auf einen kleinen leicht verständlichen Bruch) reduciren kann. Man muß daher eine zweite Proportion bilden:

$$1\ ℔ : \frac{511}{864}\ ℔ = 32\ \text{Loth} : \frac{511 \cdot 32}{864}\ \text{Loth}.$$

Der lezte Bruch hat 864, das ist (32.27) zum Nenner, wie auf dieser Seite selbst erst diese 2 Factoren vorgekommen sind. Man ersieht daher, wenn man sie hier wieder einsezt, daß

$\frac{511 \cdot 32}{32 \cdot 27}$ soviel als $\frac{511}{27}$ sei.

Nun wird die Division leicht; der Quotient ist: $(18 + \frac{25}{27})$ Loth, woraus erhellet, daß

1 Pfund $18\frac{2}{2}\frac{5}{7}$ Loth Stuttg. Gewicht eben so viel, als 1 ℔ 23 Loth Frankf. Gewicht ausmachen. Daß der Bruch an den 18 Lothen über $\frac{3}{4}$ Loth betrage, läßt sich ohne weitere Rechnung (aus der Ansicht des Zählers und Nenners schon) schliessen.

Der Rechner, dem diese Frage vorgelegt würde, könnte aber auch direct in dem ersten Proportions-Saz sogleich auf Lothe gehen. Da würde er schreiben müssen:

108 : 1 ℔ 23 L. = 100 : △

(108.32) : 55 = (100.32) : $\frac{55.100}{108}$;

oder $\frac{55.25}{27}$; das ist: $\frac{1375}{27}$ hieße das lezte Glied. Die Division giebt: $(50+\frac{25}{27})$ Lothe; welches eben 1 ℔, 18 Lothe + ... sind. Es ist nicht zu leugnen, daß auf diesem Weg öfters Zahlen erspart werden können. Wenn aber die Gröse im zweiten Glied eine grose Zahl ist, und Pfunde mit Lothen enthält, so ist dennoch die erste Methode nicht selten der zweiten vorzuziehen.

In zweifelhaften Fällen ist es räthlich, sich beeder zu bedienen. Man gelangt durch die Schlußresultate zu einer Probe der geführten Rechnung, die jeder andern künstlichern vorzuziehen ist.

§. 70. Aus Betrachtung dieser Beispiele kann jeder selbst abnehmen, daß die Berechnungen aller Gewicht-Reductionen beschwerlicher

cher werden, wenn die zwei Verhältnis-Zahlen zweier Oerter keine gemeinschaftliche Factoren haben, oder etwa blos einen, durch welchen sich die vorgegebene Zahl-Grösen eben nicht bedeutend verkleinern;

100 Hamburger Pfund sind 104 Berlin. Pfunden gleich. Da kann man natürlich anstatt

100 : 104 setzen 50 : 52; und in noch kleinern Zahlen: 25 : 26.

Ferner 100 Wiener Pfunde sind 120 Stuttgarter Pfunden gleich. Daraus folgt:

100 : 120 = 50 : 60 = 5 : 6.

Aber 100 Wiener sollen 119 (auch wohl $119\frac{1}{2}$) Berliner Pfunden gleich seyn. Da hebt sich weiter nichts in den Verhältnis-Zahlen

100 : 119;

denn es fehlt ein gemeinschaftlicher Factor, der eine Division möglich machte.

Amsterdam und Berlin haben im Gewicht die Verhältnis-Grösen 100 : 106 gegen einander; das ist 50 : 53. Auf kleinere Zahlen findet keine Reduction statt.

Frankfurt und London haben die Zahlen

100 : 112 d. i. 50 : 56 = 25 : 28.

Bei scharfgenommenen Vergleichungen kommt man aber allermeistens auf Brüche, wo alle weitere Reduction gar unmöglich fällt.

So

So sollen z. B. 100 Frankfurter Pfund Centner Gewicht 108 $\frac{11}{16}$ Pfund Berliner Gewicht gleich seyn. Dabei wäre dann an keine Verkleinerung der Zahlen weiter zu denken, wie sich leicht ermessen läßt.

IX. Abschnitt.

Ueber die Umkehrung der Verhältnisse in Proportionen, oder über die verkehrte Regel de Tri.

§. 71.

Bei sehr vielen Arbeiten im menschlichen Leben kommt man in den Fall, einzusehen, daß

je weniger Kräfte zu Vollendung eines gewissen Werks vorhanden sind,
um desto mehr Zeit dazu erfordert werde.

Wenn 6 Menschen mit einer Mauer in 4 Tagen fertig werden, so werden wohl 3 Menschen erst in 8 Tagen damit zu Ende kommen. Dabei wird vorausgesezt, daß sie anhaltend und gleich arbeiten. Jeder sieht ein, daß

6 : 3 ein fallendes Verhältnis sei,
4 : 8 aber ein steigendes.

Je weniger dort, (bei den arbeitenden Kräften;) desto mehr hier (in Zeit.) Es treten

ten also hiebei, umgekehrte Verhältnisse ein; das muß jeder zugestehen, der sich nur einen solchen Fall erzählen läßt.

Ein Proviant-Vorrath reicht für 12 Männer auf 60 Tage; das sei einmal (aus Erfahrung etwa) angenommen. Nun sollen 4 Männer weiter dazu kommen. Der Proviant soll nicht (im Ganzen) vermehrt, doch sollen die (12 + 4) das ist die 16 Männer verpflegt werden, und jeder der 16 Männer so viel täglich erhalten, als vorher jeder der zwölf. Ganz gewiß wird nun der Vorrath nicht mehr auf 60 Tage ausreichen, sondern auf eine kürzere Zeit. Das sieht jeder ein, ehe er noch die Zahl der Tage, welche die kürzere Zeit ausmachen, bestimmt berechnet hat. Sie sei berechnet, und bekannt = 45 Tage; so leuchtet wieder jedem ein, daß

12 : 16 ein steigend. Verh.
60 : 45 ein fallendes Verhältnis

sei. Je mehr zehrende Männer, desto kürzere Zeit, bis der Vorrath aufgezehrt ist!

§. 72. Man denke über diese zwei Beispiele nun weiter nach: wie wohl die Rechnungs-Sätze anzuordnen seyn dürften, wenn im ersten die Zahl der Tage, 8; im 2ten die Zahl der Tage, 45, unbekannt wäre, und gefunden werden sollte?

Geht

Geht es wohl an, sie durch directe Zusammenstellung der 2 Verhältnisse zu finden?

6 : 3 = 4 : 8
12 : 16 = 60 : 45.

Nein! es fällt in die Augen, daß 8 nicht (3.4 : 6) seyn könne; noch 45 soviel als (16.60 div. durch 12).

Man wende aber nur die zwei ersten Glieder um, so ergeben sich die lezte ganz richtig in beeden Fällen:

3 : zu 6 = 4 : zu 8
16 : zu 12 = 60 : zu 45.

In der ersten Proportion heißt der Exponent 2, in der zweiten $\frac{3}{4}$.

Mehrere Beispiele, welche jeder selbst nun wohl erfinden kann, führen auf ebendieselbe Gesezlichkeit der Umkehrung in den Verhältnissen. z. E.

Vier Noten-Schreiber copiren ein Concert in 5 Tagen, wie lange werden drei derselben dran schreiben?

Man mag wohl zuerst sezen:

4 : 3
5 : x.

Aber, um in einer Proportion das lezte Glied zu finden, muß man wieder die Glieder so stellen:

3 : 4 = 5 : x,

Das

Das lezte Glied ist $\frac{4 \cdot 5}{3}$ oder $6\frac{2}{3}$ Tage wers den die 3 Notenschreiber (bei gleicher Arbeitsamkeit) nöthig haben.

§. 73. Um nicht blos mechanisch hiebei zu verfahren, sondern auch den Grund dieser Umkehrung einzusehen, erwäge man folgendes:

Bei dem ersten Beispiel soll der Effect ebenderselbe seyn, die Vollendung einer Mauer. Man denke sich: Sechs Menschen 4 mal in gleicher Anstrengung genommen, d. i. $(6 \cdot 4)$ sollen eben den Effect geben, wie 3 Menschen, x mal genommen, oder $(3 \cdot x)$. Es soll also $(6 \cdot 4) = (3 \cdot x)$ seyn; gleiche Grösen, weil ja der Effect gleich seyn soll.

Das 4 mal-nehmen, sind 4 Tage.

Das x mal-nehmen, sind ebenfalls Tage, deren Anzahl x aber erst angegeben werden soll, und erst gesucht wird. Sollte es schwer seyn, sich von der Nothwendigkeit zu überzeugen, daß diese Producte nicht ungleich seyn können? daß der Grund der Frage selbst, auf einer stillschweigenden Annahme einer solchen Gleichung beruhe? Nehmlich auf $6 \cdot 4 = 3 \cdot x$. Es soll ja ebendasselbe Werk geleistet werden, durch 6 Männer und wieder durch 3 Männer, nur in ungleicher Zeit!

Nun, so bald man die Statthaftigkeit dieser Gleichung selbst einsieht, so denke man daran,

daß in jeder geometrischen Proportion (dem §. 54 gemäs)

1) das Product der mittlern Glieder dem der äussern gleich sei;

2) daß, wenn die 2 Factoren, 6 und 4, zu zwei mittlern Gliedern einer geometrischen Proportion eingeschrieben werden, die 2 Factoren 3 und x die äussern Glieder abgeben müssen. (nach Nr. 2 des §. 58.)

Sobald aber dieses zugestanden wird, so erkennt man unmittelbar, daß die Sätze so ausfallen:

$$3 : 6 = 4 : x$$

und daß $x = \frac{6 \cdot 4}{3}$, das ist (2.4) oder 8 seyn müsse. Daher dann die obige Proportion zum Vorschein kommt.

$$3 : 6 = 4 : 8$$

(Arbeiter) (Tage)

Bei dem zweiten Beispiel bemerke man wieder zuerst, daß das Totale des Proviant-Vorraths ebendasselbe seyn und bleiben soll, es mögen 12 oder 16 Mann daran zehren. Zwölf Mann in 60 Tagen werden ihn aufzehren, ist die erste Grundbehauptung. Man kann auch dafür wieder die Vorstellung einschieben: Zwölf, 60 mal genommen, oder (12.60)

Weiter aber 16 Mann in z Tagen, sollen eben den Vorrath aufzehren. Auch dafür läßt

sich

sich denken: 16, z mal genommen, oder (16.z). Das Resultat soll eben dasselbe und gleich seyn. Damit kommt man nothwendig darauf:

12.60 mal sollen eben so viel, als 16.z mal seyn; d. i. man kommt auf die Gleichung (12.60) = (16.z). Und hieraus läßt sich jezt abermals allerdings die Proportion bilden:

(Verzehrende) (Tage)

16 : 12 = 60 : z

oder 4 : 3 = (4.15) : z.

Das lezte Glied ist (3.15) oder 45; wie auf dem vorigen Blatt schon behauptet worden. Auch hiebei ist es wieder vortheilhaft, wenn man gleichartiges zu gleichartigem stellt. Die Verzehrende neben einander; und die Tage neben einander. *)

*) Durch diese Zusammenordnung des Gleichartigen wird man selbst auf den richtigen Saz der Glieder ganz nothwendig hingeführt. Denn man weis doch, sobald man (eben in dem lezten Fall) noch vor der Ausrechnung hingestellt hat:

60 : z

daß hier im 3ten und 4ten Glied, Tage mit Tagen in Vergleichung kommen, indem 60 die gegebene Tage bedeuten, z aber die gesuchten; (nach welchem eben in dem Problem gefragt wird.) Die Anzahl dieser leztern muß weniger, als 60, betragen. So viel zeigt der gesunde Menschen-Verstand doch jedem an, der nur

Bei dem 3ten Beispiel denke man wieder zu erst: das Werk, das einmal zu vollenden ist, ist nur die Aufgabe überliest. Ist dem aber so, so ist ganz gewiß 60 : z ein fallendes Verhältnis. Daraus folgt aber unmittelbar:

„daß auch die 2 ersten Glieder der Propor„tion so gestellt werden müssen, daß ein fallen„des Verhältnis herauskomme.“ Diese zwei ersten Glieder sind gegebene (schon in der Aufgabe ausgesprochene) Zahlen, welche gleichartige Dinge angehen; (in Concreto, Verzehrende). Ob 12 : 16 oder 16 : 12 gesezt werden müsse, erhellet also schon aus dem Saz: 60 : z; Natürlich muß ja die kleinere Zahl (12) das zweite Glied einnehmen, weil z das lezte Glied einnimmt, und z zuverlässig kleiner, als 60 ist, welches man gewis weis, auch ehe man noch die bestimmte Zahl, die unter z verdekt liegt, ausgemittelt oder ausgerechnet hat.

Diese Bemerkungen mögen die benützen, welche sich etwa nicht sogleich bei jedem Problem darein dürften finden können, wie eine Gleichung von 4 Factoren zu bilden wäre? oder, welchen es überhaupt nicht gefallen möchte, die Deduction von daher, (von 2 gleichen Producten) zu nehmen, und den Uebergang von der Gleichung auf die Bildung der aufzustellenden Proportion auf einem kleinen (ihnen vielleicht beschwerlich scheinenden) Umweg zu machen. Nach wiederholten Erwägungen werden sie den vorgezeichneten Weg zwar gewiß nicht für verwerflich erkennen müssen. Es mag ihnen aber frei stehen, zum Anfang jede Aufgabe, welche die sogenannte verkehrte Regel de Tri angeht, auch ohne Entwerfung einer Glei-

ist ein Musikstük. Dessen Grösse bleibt (identisch) ebendieselbe, es mögen vier Copisten dran arbeiten, oder nur drei.

Vier in 5 Tagen lassen sich 4 fünfmal, denken = (4 . 5)

Drei in y Tagen lassen sich = (3 . y) denken.

Und daraus folgt wieder die Gleichung

$$(4 \cdot 5) = (3 \cdot y)$$

und aus derselben die Proportion (nach §. 58. Nr. 2)

$$3 : 4 = 5 : y$$
(Copisten) (Tage)

woraus $y = \frac{20}{3}$ oder $6\frac{2}{3}$ sich ergiebt.

Die Umkehrung der Verhältnis-Zahlen wird hieraus begreiflich; Sie muß so vor sich gehen, weil sich das gleiche Product der äussern Glieder, welches 2 Factoren sind, doch unmöglich so trennen läßt, daß einer derselben eine Stelle von den 2 mittlern Gliedern einnehmen könnte. Dieses zu erzwingen, stritte gegen die evidente Sätze des §. 54; und liefe, nach Aufstellung der Sätze selbst, auf wahren Unsinn hinaus; wenigstens könnte man keine geometrische Proportion damit zu Stande bringen,

Gleichung, dem Vortrag dieser Note gemäs, blos durch einen Schluß von dem 3ten und 4ten Glied, auf die Ordnung des ersten und zweiten aufzulösen.

gen, welche sich doch durchgehends, wenn 2 Factoren mit 2 andern eine Gleichung ausmachen, bilden läßt; aber gar auf keine andere Art, als auf die gewiesene hier gebildet werden kann. (Man vergl. §. 58.)

§. 74. Wenn man den Vortrag, welchen die zwei lezte Blätter enthalten, wohl erwägt, so sieht man bald ein, daß durch die so genannte verkehrte Regel de Tri keine neue oder besondre Rechnungsart gelehrt wird. Ueberall kommt blos die einfache Regel de Tri, oder jedesmal schlechthin eine Proportion vor, ganz von der einfachen Bildung, dergleichen im vorhergehenden Abschnitt und von §. 50 an, genug schon vorgekommen sind. Die Belehrungen in diesem Abschnitt enthalten also, in der Nähe besehen, blos Erinnerungen, auf den Sinn der vorgelegten Fragen wohl aufmerksam zu seyn, und Warnungen, die Glieder nicht widersinnig zu stellen, damit doch nur eine geometrische Proportion zusammen geordnet werden, und existiren könne.

Anfänger werden, so oft ihnen eine Frage, in welcher umgekehrte Verhältnisse zum Grund liegen, vorgelegt wird, hauptsächlich dadurch irre, weil von den 3 Zahl-Grösrn, welche in dem Problem ausgesprochen worden, gerade die lezte, (die 3te,) in das erste Glied der zu formirenden Proportion eingesezt werden muß. Man sehe nur in die drei Beispiele zurük. Die

Zahl

Zahl im ersten Glied ward niemals vornen sogleich im Problem genannt; sondern erst am Schluß. Damit tritt freilich

eine Inversion, eine Umkehrung

ein. Diese Umdrehung der Ordnung geht aber blos den Sprachgebrauch *) an, welcher bei Fragen, die auf Vergleichungen der oben angeführten Weise:

*) Man mag auch hier auf die Erinnerungen, wieder zurükſehen, welche oben am Ende des §. 60 gemacht worden, daß Wendungen der Rede und eines besondern Vortrags den Rechner nicht leiten dürfen.

Man kann alle hierher gehörige Probleme selbst so vortragen, daß darinn die Zahl, welche in das erste Glied der Proportion aufzunehmen ist, wirklich auch allemal zuerst in dem Problem ausgesprochen wird. Man muß nur mit der Frage selbst anfangen, und die Bedingung erst folgen lassen. Das erste Beispiel wäre hiernach so vorzutragen:

In wie viel Tagen werden 3 Männer wohl mit einer Mauer fertig, wenn 6 Männer in 4 Tagen sie (einer gewissen Erfahrung nach) zu Stande bringen?

Das zweite: Wie lange werden 16 Männer an einem Proviant-Vorrath zehren, wenn derselbe für 12 Männer 60 Tage zureicht?

So kann die Sprache die Data einer jeden Aufgabe in verschiedenen Stellungen vortragen. Dergleichen natürlich- oder künstlichgewählte Einordnungen der Zahlen (in der Rede oder im Thema des Räthsels) bestimmen aber für sich sonst niemals den Gang des Calküls.

„Je mehr da, desto weniger dort!“ hinauslauffen; die Ordnung der Glieder in den zu formirenden Proportionen selbst allerdings nicht unmittelbar verräth.

Allein, wenn man nur ein wenig nachdenkt, ob der Betrag des lezten Glieds, nach welchem gefragt wird, die Schluß-Gröse eines fallenden, oder eines steigenden Verhältnisses seyn könne, (welches der gesunde Menschen-Verstand jedem sagen muß) so kann man in der That kaum irren, oder lange anstehen, welche der genannten Grösen wohl ins erste Glied einzusetzen seyn dürfte?

Nachtrag zu §. 73 und §. 74.

Die umgekehrte Regel de Tri ist vorzüglich anzuwenden, wenn Maase (Längen-Maase, Quadrat-Maase, Cubikmaase) verschiedener Städte und Länder mit einander verglichen werden sollen; und man eine Reduction fremden Maases auf innländisches nöthig hat.

Man weis, zum Beispiel, daß, wenn dem Pariser Fus-Maas eine Linie oder Länge zugeeignet wird, welche 144 gleiche Theilchen enthält, dem Heilbronnischen Fusmaas 123 eben solcher Theilchen angehören, und fragt nun, wie viel 16 Pariser Fus oder Schuh in Heilbr. Maas betragen?

Die Verhältnis-Zahlen für Paris und Heilbronn sind offenbar hiemit gegeben, als 144 : 123.

Ge-

Gesucht wird aber eine Zahl, welche grö-
ser als 16 seyn muß. Nehmlich das 3te und
4te Glied der Proportion, vermittelst welcher
das vorgelegte Problem aufzulösen ist, darf
gewiß

= 16 : z

geschrieben werden; und wenn gleich z noch nicht
als Zahl in Concreto bekannt ist, so ist doch
schon aus der Angabe

daß der Pariser Fus mehr in Länge be-
trägt, als der Heilbronnische,

so viel abzunehmen, daß z mehr, als blos 16
seyn müsse. Das 4te Glied ist demnach sicher,
gröser als das 3te.

Hieraus folgere man auf das erste und
zweite Glied. Das zweite muß darnach auch
gröser als das erste seyn. Sonst wäre die Auf-
gabe ja gar nicht durch eine geometr. Proportion
aufzulösen. Die zwei Zahlen 144 und 123
sollen die zwei erste Glieder ausmachen. Ihre
Stellung muß daher umgewendet, es muß ge-
sezt werden:

123 : 144 = 16 : z.

Da ist 144 das grössere der zwei ersten
Glieder; so wie z das grössere der zwei hintern
Glieder vorstellt.

Blos vermittelst einer solchen Stellung
läßt sich nun das Problem auflösen;

z ist = $\frac{144 \cdot 16}{123}$ oder 18 $\frac{90}{123}$

oder 16 Pariser Fus werden 18 Heilbr. Fus und beinahe $\frac{3}{4}$ drüber *) zum Aequivalent erfordern.

Wer bei der Vorlegung dieses Problems etwa so dächte:

„die Zahl 144 geht Paris. Maas an.
„Die Zahl 16 geht ebenfalls Paris. Maas
„Folglich müssen wohl 144 : 16 in zwei
„Glieder nebeneinander gestellt werden,

der würde eine Proportion damit formiren, welche auf ein durchaus unrichtiges Resultat hinaus führen müßte.

Der angehende Rechner muß vielmehr seine Gedanken allemal folgenden Weg nehmen lassen:

Er muß denken:

123 zu 144 = wie H zu P

die erste Zahl geht Heilbronn an, die andere Paris. Anstatt H und P, schreibe er 1.H: 1.P; **) so wird gewiß aus der Proportion

123

*) Die Zahlen 144 und 123 haben beede 3 zum gemeinschaftlichen Factor. Man kann statt ihrer setzen:

$= \frac{3 \cdot 48}{3 \cdot 41}$ das ist $\frac{48}{41}$.

Damit wird das lezte Glied $18\frac{30}{41}$; wofür man doch wohl $18\frac{3}{4}$ annehmen darf.

**) 1.H stellt ein Heilbronn. Maas vor, es sei nun ein Zoll oder ein Schuh. So auch 1.P ein Paris. Maas; es sei ein Zoll oder ein Schuh oder Fus. (Denn Fus und Schuh sind gleichbedeutende Ausdrücke in der Lehre von Längenmaasen.)

$$123 : 144 = 1.H : 1.P$$

folgen, daß

$$1.P = \frac{144}{123} . 1.H$$

sei; oder mit Worten ausgedrükt:

Ein Pariſ. Fus wird $= \frac{144}{123}$ Heilbr. F.

Ein Pariſ. Zoll wird $= \frac{144}{123}$ Heilbr. Zoll

seyn. Iſt aber dieſes ausgemacht, ſo wird ein einfacher Regel de Tri-Saz, (bei welchem gar keine Umkehrung eintritt) die Auflöſung der Frage ſelbſt vollends geben:

$1.P$ zu 16 P = wie $\frac{144}{123} . H$ zu $\frac{144 . 16}{123} . H$.

Das lezte Glied beträgt eben $18\frac{30}{123}$; welche Zahl mit der oben angezeigten übereinkommt.

Man erkennt hiemit, auf welche einfache und ganz natürliche Weiſe man zu dem vorgelegten Ziele gelange; und ſieht eben damit den Weg vorgezeichnet, welchen man auch bei jeder andern Aufgabe, welche hieher einſchlägt, zu nehmen habe.

Dem Pariſer Fus werden gewöhnlich nicht blos 144, ſondern 1440 kleine Theilchen zugeſchrieben. Auch dem Heilbronniſchen Fus kommen darnach nicht blos 123 ſondern 1230 oder ſchärfer 1234 (bis 1235) ſolcher kleinen Theilchen zu.

Dem

Dem Rheinländ. Fus werden 1391
Dem Nürnberg. 1346
Dem Stuttgardter 1268
Dem Londner 1350
Dem Berliner 1373

} solcher Theilchen,

alle in Beziehung auf die Verhältnis-Zahl 1440, zugeeignet. Eine noch viel grössere Reihe von Verhältnis-Zahlen für andre Städte findet man (eben hiernach angegeben) in sehr vielen Taschenbüchern, Almanachen, und andern Schriften.

Man schliest aus zwei solchen Verhältnis-Zahlen allemal, wie aus den zwei angeführten: 144 und 123. Noch etliche Beispiele werden nicht gar überflüssig hier stehen:

Heilbronn und Stuttgardt kommen die Verhältnis-Zahlen 1234 und 1268 zu; wie viel werden 12 Stuttgardter Zolle im Heilbronnischen Zollmaas betragen?

Die Antwort auf diese Frage ergiebt sich durch den Saz:

$$1234 : 1268 = 12 : Z$$

oder: $617 : 634 = 12 : \frac{634 \cdot 12}{617}$.

Die lezte Zahl beträgt: $12\frac{1}{3}$ *), so daß hiernach

$12\frac{1}{3}$

*) Die Division giebt eigentlich $12\frac{204}{617}$ welches nicht gar $12\frac{1}{3}$ beträgt, aber doch bis auf 1 Tausendtheilchen dran hinreicht.

$12\frac{1}{3}$ Heilbr. Zoll oder 12 Zoll 4 Lin. so viel als 12 Stuttg. Zolle betrügen, oder 1 Stuttg. Schuh,

im zwölftheiligen Maas gleich kämen. Ehe noch die Rechnung angeht, muß man erwägen, daß, der Angabe in der Thesis gemäs, 2 grösser, als 12 auch hier seyn, und daher 1268 in das zweite Glied gesezt werden müsse. Wer die Zahlen 1268 und 12 als Verhältnis-Grösen neben einander in das 1ste und 2te, oder in das 1ste und 3te Glied zusammenstellte, würde die gehörige Antwort niemals finden, wenn gleich die Zahl 1268 und die Zahl 12 Stuttgardt angehen, und daher auf die Stellung 1268 : 12 oder umgewendet, die Vermuthung geworfen werden möchte.

Der Heilbronnische Schuh verhält sich zur Heilbronnischen Elle, wie 12 zu $25\frac{2}{3}$. Wie viel betragen also wohl 100 Schuh im Ellenmaas?

Wer hier denken wollte:

„12 geht den Heilbr. Schuh an, weil 12
„Zoll = 1 Schuh sind;
„100 Schuh sind 1200 Zoll; Also muß
„wohl gesezt werden: Zoll zu Zoll,
„12 zu 1200 = wie $25\frac{2}{3}$ zu 2; so daß
„Ellen zu Ellen in die zwei lezte Glieder
„kämen;

der würde eine ganz falsche Rechnung führen. Vielmehr müssen die Glieder der Proportion verkehrt und so gesezt werden:

$25\frac{2}{3}$

$$25\tfrac{2}{3} : 12 = 100 : z$$
$$\text{oder } \tfrac{77}{3} : \tfrac{36}{3} = 100 : \tfrac{3600}{77}.$$

Das lezte Glied beträgt $46\frac{52}{77}$, wofür $46\frac{3}{4}$ gesezt werden darf; so daß darnach

$46\frac{3}{4}$ Heilbr. Ellen = 100 Heilbr. Schuhen wären.

Rechtfertigung der Stellung der Verhältnis-Glieder.

$25\frac{2}{3}$ S sind = 12. E, wo S Schuhe, und E Ellen bedeutet.

Diese Gleichung folgt aus den Fundamental-Verhältnissen:

$$12 : 25\tfrac{2}{3} = \left\{\begin{array}{l}\text{Schuh : Elle}\\ \text{S : E}\end{array}\right.$$

deren Richtigkeit niemand in Abrede stellen wird, der nur weis, daß die Elle ein grösseres Längen-Maas ist, als ein Schuh. Aus diesen Verhältnissen folgt aber unmittelbar:

$$\left(\frac{12}{25\frac{2}{3}} \cdot E\right) = S, \text{ oder } 1\ S.$$

Und also, (wenn man den Bruch bequemer durch $\frac{36}{77}$ ausdrükt)

$$1.S \text{ zu } 100.S = \tfrac{36}{77}.E : \text{zu } \tfrac{3600}{77}.E$$

womit man eben wieder auf $46\frac{3}{4}$ hinaus kommt *); indem der eigentliche Bruch $\frac{58}{77}$, der an 46 hängt, gar sehr wenig über $\frac{3}{4}$ beträgt.

X. Ab-

*) Hiebei mag angemerkt werden, daß man auch oft den Saz annimmt;

X. Abschnitt.

Ueber die Zusammensetzung zweier connexen Proportionen, und der daraus abgeleiteten Reesischen Regel.

§. 75.

Manche Rechnungs-Fragen lassen sich nicht mittelst einer einzigen Proportion beantworten.

Die Frage *) kann zu viele Bestimmungen enthalten, als daß vier Glieder oder zwei Verhältnisse zureichten, um das, was gesucht wird,

$7\frac{1}{2}$ Heilbr. Ellen sind = 16 Heilbr. Schuh
oder 15 Heilbr. Ellen sind = 32 Heilbr. Schuh.

Die Folgerung hieraus führt beinahe auf eben das Resultat: Denn aus der Proportion

15 : 22 = S : E ergiebt sich

$(\frac{32}{15}.E) = (1.S)$; und hieraus folgt:

$1 S : 100 S = \frac{32}{15}.E : \frac{3200}{15}.E.$

Das lezte Glied ist $46\frac{7}{8}$ E, als das Aequival. von 100 Heilbr. Schuhen.

*) Genau zu sprechen, muß man die Erzählung, die vor der Frage vorhergeht, von der Frage selbst unterscheiden. In dieser wird allemal eine gewisse Erfahrung behauptet. Man kann diesen Theil die Geschichte im Problem heissen, auf welchen erst die Frage folgt. Diese Auseinandersetzung hat allerdings ihren guten Nutzen, wie sich in vielen Fällen zeigen wird.

wird, sogleich im 4ten Glied darzustellen; man mus vielmehr zwei zusammenhängende Proportionen formiren, um das aufgegebene Problem wirklich zu lösen. Um dieses verstehen zu lernen, denke man einmal über folgendes Beispiel nach: Es wird angegeben, vier Personen verzehren in 3 Monaten 57 Gulden; und alsdenn gefragt: Was werden 8 Personen in 9 Monaten verzehren? (gleiche Eßlust, oder Beschränkung des Appetits vorausgesezt.) Wie soll man die Zahlgrösen, welche hiebei genannt werden, in Verhältnisse zusammen stellen, und Proportionen daraus bilden?

Ich will sogleich die Proportionen darstellen, durch welche die Frage sich beantworten läßt, und alsdenn die nöthige Erklärung dazu beifügen. Sie heissen:

4 : 8 = 57 : 114
3 : 9 = 114 : 342.

Um zu verstehen, wie diese Verhältnisse aus der Frage so combinirt werden mögen, wie sie da vor Augen stehen, muß man erwägen, daß aus dem Innhalt des Problems schon sich folgende Sätze entwickeln lassen:

4 Personen verzehren 57 Gulden, also werden 8 Personen das doppelte verzehren! Dabei ist zuerst eine und ebendieselbe Zeit angenommen; wovon freilich das Problem nichts sagt. Vielmehr werden darinn zuerst 3 Monate, und alsdenn 9 Monate, als verschiedene

Zeiten

Zeiten der Zehrungen, genannt. Allein zu der ersten Vergleichung braucht man diese Verschiedenheit der Zeiten nicht; vielmehr irrt sie, und man muß sie selbst gar wegdenken, um mit 4 Gliedern auszukommen, wenn man die erste Vergleichung anstellt,

zwischen einer kleinern Anzahl von Verzehrenden, und einer grössern,
und einem kleinern Geldaufwand und einem grössern.

Erst, wenn die erste Proportion berichtigt ist, und man so viel weis: 8 Personen brauchen 114 Gulden; kann man weiter schreiten, und etwa so sprechen:

„Die 8 Personen brauchen die 114 Gul„den binnen 3 Monaten, wie viel Gulden „werden sie dann bei fortgehender Zehrung „in 9 Monaten brauchen?

Erst da kann und muß man combiniren:

3 zu 9; Zeit zu Zeit; Ebenso
114, Zehrung in der ersten Zeit,
zu x; Zehrung in der zweiten Zeit, (in 9 Mon.)

Damit gelangt man natürlich zu Aufstellung der 2ten Proportion:

$$3 : 9 = 114 : x.$$

Das lezte Glied ist $\frac{9 \cdot 114}{3}$ d. i. $(3 \cdot 114)$ oder 342. Diese Zahl muß die Gulden angeben, welche die 8 Personen in 9 Monaten ver-

zehren werden. So bald sie ausgeworfen da steht, ist das Räthsel aufgelöst, oder die Frage selbst beantwortet.

Man sehe die zwo aufgestellte Proportionen nochmals an; das lezte Glied der 1sten (114) kommt als das dritte Glied in der zweiten Proportion wieder vor.

Man denke sich die zwei Proportionen so geschrieben:

$$4 : 8 = 57 : \frac{57 \cdot 8}{4}$$

$$3 : 9 = \frac{57 \cdot 8}{4} : \frac{57 \cdot 8}{4} \cdot \frac{9}{3}.$$

In diesen Sätzen sieht man die Zahl 114 selbst nicht; die Factoren werden blos zusammen gestellt, nur mechanisch ohne wirkliche Rechnung geordnet. Der Betrag ist aber eben derselbe. Erst mit dem lezten Glied fängt die Erforderniß, wirklich calculiren zu müssen, an. Nehmlich aus

$\frac{57 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 3}$ muß man formiren:

$57 \cdot 2 \cdot 3$ oder $57 \cdot 6$.

Diese 2 Factoren geben, wenn man wirklich multiplicirt, 342. Es liegt damit am Tag, daß man die Zahl 114 selbst nicht, der Strenge nach, zu wissen brauche, sondern daß die Zusammenstellung schon zureiche,

$\frac{57 \cdot 8}{4}$ oder $57 \cdot 2$,

ohne wirkliche Multiplication, und daß man dennoch zum Ziel gelange; Ja, daß auch in

der

der That am Ende eine einzige Multiplication (6 mal 57) das ganze Geschäft zu Ende bringe, weil sich alle andre Grösen auffallend leicht heben.

Gros ist der Vortheil der bis auf das lezte Glied der zweiten Proportion aufgesparten Multiplication nun freilich in diesem Fall eben nicht, weil 114 ein gar leichtes Product ist, aus (2 . 57). Aber wir werden bald Fälle genug vor die Hand bekommen, in welchen der bemerkte Vortheil, das lezte Glied der 1sten Proportion nicht wirklich auscalculirt hinzustellen, von viel gröserem Belang erscheinen wird.

Dieses erste Beispiel zweier zusammenhängenden Proportionen ist geflissentlich so einfach gewählt worden.

§. 76. Man nehme einmal zu der vorigen Frage blos andre Zahlen an, und sehe alsdenn, wie die 2 Proportionen ausfallen:

Vier Personen verzehren in 3 Monaten 56 Gulden; was werden 7 Personen in 9 Monaten verzehren?

Um die 2 Proportionen zu bilden, muß der Anfänger dieses Problem in zwei Fragen zerlegen:

1) Vier Personen verzehren 57 Gulden; was verzehren 7 Personen in gleicher *) Zeit? Antwort: $99\frac{3}{4}$ Gulden.

2) Die

*) Die Benennung dieser gleichen Zeit (3) kommt erst in die IIte Proposition. Dagegen kommt die

2) Die 7 Personen sollen die $99\frac{3}{4}$ in 3 Monaten verzehrt haben, wie viel werden sie in 9 Monaten verzehren? Antwort: 266 Gulden.

Diese Fragen werden durch die Proportionen beantwortet:

(I) 4 : 7 = 57 : $99\frac{3}{4}$
Personen — Zehrung in Gulden

(II) 3 : 8 = $99\frac{3}{4}$: 266
Monate — Zehrung in diesen Monaten.

Allein man bemerke sogleich, daß die Gröse im 4ten Glied der 1sten Proportion im 3ten Glied der 2ten wieder vorkomme, daß sie = $\frac{7 \cdot 57}{4}$ sei; und daß die wirkliche

Multiplication 7 mal 57 ist 399
und die Division durch 4, womit $99\frac{3}{4}$
zum Quotienten herauskommt,

erspart werden könne, wenn man in die Proportionen blos schreibt, wie hier folgt:

$$4 : 7 = 57 : \frac{57 \cdot 7}{4}$$
$$3 : 8 = \frac{57 \cdot 7}{4} : \frac{57 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 3}.$$

Da ist noch nichts gerechnet, sondern blos zusammengestellt. Aber nun gehe man an die Rechnung des lezten Glieds der zweiten Proportion selbst. Der vorsichtige Rechner wird doch

na-

die Benennung der 7 Personen nicht in die IIte.

Man vergl. unten S. 223.

natürlich zuerst noch sich umsehen, was sich in dem Bruch wohl heben und wegschaffen lassen dürfte? Und da wird er gar schnell bemerken, daß

$\frac{57}{3}$ so viel als 19;
und $\frac{8}{4}$ so viel, als 2 sei.

Er wird daher im lezten Glied, anstatt

$\frac{57 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 4}$ blos $19 \cdot 2 \cdot 7$ oder $(19 \cdot 14)$

d. i. blos zwei Factoren noch mit einander zu multipliciren haben; und deshalb in Kürze mit dem Calkül ganz fertig werden; 19 mal 14 ist $=$ 266.

Ganz gewiß würde er wohl auch diese Zahl 266 erhalten haben, wenn er $(99 + \frac{3}{4})$ mit 8 multiplicirt, und mit 3 das Product dividirt hätte. Wer sieht aber nicht ein, daß, wenn man ohne diese Operationen zum Ziel gelangen kann, Zeit und Mühe erspart sei? Man kann aber dazu gelangen, wenn man das lezte Glied der 1sten Proportion gar nicht wirklich sogleich ausrechnet, sondern blos die Factoren zusammenordnet, und die Rechnung bis in das lezte Glied der 2ten Proportion aufschiebt. Dieser Aufschub bringt den Vortheil, daß sich mittelst des 1sten und 2ten Glieds der IIten Proportion am Schluß Grösen aufheben lassen, in dem die Zahlen dieser zwei Glieder, Factoren im Zähler und Nenner des allerlezten Gliedes abgeben. Diese Factoren veranlassen Verklei-

2) Die 7 Personen sollen die $99\frac{3}{4}$ in 3 Monaten verzehrt haben, wie viel werden sie in 9 Monaten verzehren? Antwort: 266 Gulden.

Diese Fragen werden durch die Proportionen beantwortet:

(I) 4 : 7 = 57 : $99\frac{3}{4}$
Personen Zehrung in Gulden

(II) 3 : 8 = $99\frac{3}{4}$: 266
Monate Zehrung in diesen Monaten.

Allein man bemerke sogleich, daß die Gröse im 4ten Glied der 1sten Proportion im 3ten Glied der 2ten wieder vorkomme, daß sie = $\frac{7 \cdot 57}{4}$ sei; und daß die wirkliche

Multiplication 7 mal 57 ist 399
und die Division durch 4, womit $99\frac{3}{4}$
zum Quotienten herauskommt,

erspart werden könne, wenn man in die Proportionen blos schreibt, wie hier folgt:

$$4 : 7 = 57 : \frac{57 \cdot 7}{4}$$
$$3 : 8 = \frac{57 \cdot 7}{4} : \frac{57 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 3}.$$

Da ist noch nichts gerechnet, sondern blos zusammengestellt. Aber nun gehe man an die Rechnung des lezten Glieds der zweiten Proportion selbst. Der vorsichtige Rechner wird doch na-

die Benennung der 7 Personen nicht in die IIte. Man vergl. unten S. 223.

natürlich zuerst noch sich umsehen, was sich in dem Bruch wohl heben und wegschaffen lassen dürfte? Und da wird er gar schnell bemerken, daß

$\frac{57}{3}$ so viel als 19;
und $\frac{8}{4}$ so viel, als 2 sei.

Er wird daher im lezten Glied, anstatt

$\frac{57 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 4}$ blos 19.2.7 oder (19.14)

d. i. blos zwei Factoren noch mit einander zu multipliciren haben; und deshalb in Kürze mit dem Calkül ganz fertig werden; 19 mal 14 ist = 266.

Ganz gewiß würde er wohl auch diese Zahl 266 erhalten haben, wenn er $(99 + \frac{3}{4})$ mit 8 multiplicirt, und mit 3 das Product dividirt hätte. Wer sieht aber nicht ein, daß, wenn man ohne diese Operationen zum Ziel gelangen kann, Zeit und Mühe erspart sei? Man kann aber dazu gelangen, wenn man das lezte Glied der 1sten Proportion gar nicht wirklich sogleich ausrechnet, sondern blos die Factoren zusammenordnet, und die Rechnung bis in das lezte Glied der 2ten Proportion aufschiebt. Dieser Aufschub bringt den Vortheil, daß sich mittelst des 1sten und 2ten Glieds der IIten Proportion am Schluß Grösen aufheben lassen, in dem die Zahlen dieser zwei Glieder, Factoren im Zähler und Nenner des allerlezten Gliedes abgeben. Diese Factoren veranlassen Verklei-

nerung des Bruchs, den das Schlußglied darstellt; und vermindern die Divisions-Actus, welche mit diesem lezten Glied (oder Bruch) fast jedesmal vorgenommen werden müssen. In unserm Beispiel fällt sogar damit alle Division selbst hinweg, und es bleibt blos noch ein Multiplications-Act übrig.

So weit führt wohl nicht jede Reduction; bei gar vielen bleibt vielmehr noch ein Divisions-Act zu vollführen vorbehalten; Allein es ist schon viel gewonnen, wenn bei demselben der Divisor nur keine grose Zahl mehr ist.

Gesezt, es würde das Problem vorgelegt:

5 Männer verdienen in einem halben Monat 11 Gulden; wie viel können 7 Männer in 25 Tagen verdienen?

so mag auch hier der Anfänger wieder sprechen:

(I) 5 Männer verdienen 11 Gulden, wie viel Gulden werden wohl 7 Männer in gleicher Zeit verdienen? Antwort: $15\frac{2}{7}$ Gulden.

(II) Der Betrag sei in einem halben Monat, d. i. in 15 Tagen verdient. Wie viel Verdienst kann den 7 Männern in 25 Tagen werden? Antw. $25\frac{2}{3}$.

Denn gewiß haben die Proportionen statt:

$$5 : 7 = 11 : 15\frac{2}{7}$$
$$15 : 25 = 15\frac{2}{7} : 25\frac{2}{3}.$$

Allein

Allein die wirkliche Ausrechnung der Zahl $15\frac{2}{7}$ kann wegfallen, wenn man blos so sezt:

$$5 : 7 = 11 : \frac{11 \cdot 7}{5}$$

$$15 : 25 = \frac{11 \cdot 7}{5} : \frac{11 \cdot 7 \cdot 25}{5 \cdot 15}.$$

Man denke das lezte Glied so geschrieben: $\frac{11 \cdot 7 \cdot 25}{3 \cdot 5 \cdot 5}$. Da hebt sich $\frac{25}{25}$; und es bleibt blos

$\frac{11 \cdot 7}{3}$, d. i. $\frac{77}{3}$ oder $25\frac{2}{3}$.

Diese Rechnung ist leicht. Die Zahl 77 durch 3 zu dividiren, ist ein Geschäft, das sich im Kopf, ohne nur eine Feder (fast) anzusezen, verrichten läßt.

§. 77. Der Aufschub aller Ausrechnung bis ins lezte Glied bringt aber noch grössere Vortheile zur Abkürzung mit sich, von welchen jezt sogleich die Anzeige folgen soll:

Man betrachte die Zahlen im 4ten Glied der ersten Proportion. Sie kommen, wenn man die Factoren läßt, in der zweiten Proportion, (wie gedacht) wieder vor, und dies nicht allein im 3ten, sondern auch im allerlezten Glied. In diesem lezten werden zwar noch zwei andre Zahlen beigefügt, (die 2 ersten Glieder der IIten Proportion). Aber das gedachte 4te Glied der Isten Proportion bleibt doch allemal ein wesentlicher (integranter) Theil des allerlezten Schluß-Gliedes. Man sehe in die gegebene Beispiele zurük; man wird ersehen, daß

im 1sten Beispiel $\frac{57 \cdot 8}{4}$

im 2ten Beispiel $\frac{57 \cdot 7}{4}$

im 3ten Beispiel $\frac{11 \cdot 7}{5}$

jeder dieser Brüche dreimal vorgekommen.

Die Mühe, diese Brüche 3 mal zu schreiben, kann gespart werden, weil in jeder Frage, die der gegebenen ähnlich ist, ein solcher Bruch 3mal an ebendenselben Stellen vorkommt, und man dieser Stellen gewiß ist. Man zeichne blos einen Punkt in die zwei erste Stellen, und schreibe die Zahlen nur in das lezte Schluß-Glied ein. Erst bei diesem soll ja die eigentliche Rechnung angehen; Wenn also nur der Bruch selbst eingeschrieben steht, so muß der Erfolg, das Resultat am Ende der Rechnung, ganz ebendasselbe seyn, gleich als ob man den gedachten Bruch wirklich 3 mal geschrieben hätte. Das läßt sich gar nicht in Abrede stellen.

Demnach schreibt man

im Isten Beispiel

anstatt $4 : 8 = 57 : \frac{57 \cdot 8}{4}$

$3 : 9 = \frac{57 \cdot 8}{4} : \frac{57 \cdot 8 \cdot 9}{4 \quad 3}$

blos so:

$4 : 8 = 57 : \quad .$

$3 : 9 = \quad . \quad : \frac{57 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 3}$

und beginnt alsdenn die Ausrechnung selbst.

Im

Im IIten Beispiel

anstatt $4 : 7 = 57 : \frac{57 \cdot 7}{4}$

$3 : 8 = \frac{57 \cdot 7}{4} : \frac{57 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 3}$

blos so:

$4 : 7 = 57 : .$

$3 : 8 = . : \frac{57 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 3}$

Im IIIten Beispiel

anstatt $5 : 7 = 11 : \frac{11 \cdot 7}{5}$

$15 : 25 = \frac{11 \cdot 7}{5} : \frac{11 \cdot 7 \cdot 25}{5 \cdot 15}$

blos so:

$5 : 7 = 11 : .$

$15 : 25 = . : \frac{11 \cdot 7 \cdot 25}{5 \cdot 15}$

Für die zwei Punkte lassen sich auch Zeichen einsetzen: Δ, oder Φ oder y. Genug, wenn man sich den Bruch im 4ten Glied der Isten Proportion darunter denkt.

Punkte sind am schnellsten gezeichnet; und vor y und Φ fürchten sich oft Unkundige, und schrecken zurük. In der That sind aber Zeichen immer sicherer als schlechte Punkte, welche man übersehen, oder unrichtig deuten und verwechseln kann. *) Indessen mögen in diesen Rechnungs-Sätzen doch blose Punkte zureichen.

*) Auch darum sind Buchstaben des Alphabets hiebei zu empfehlen, weil sich vermittelst derselben am kürzesten und bündigsten darthun läßt,

Man gebe sich selbst mehrere Beispiele zur Uebung. Gar bald wird man damit auf das kommen, was die alten Rechner

die Regel Quinque

oder Regulam de Quinque

nannten. Wenn man zwei Proportionen mit zwei solchen Puncten schreibt, so sieht man, daß allemal fünf Zahlen, (und nicht mehr als fünf, insofern ein etwa in einem Glied einzeln vorkommender Bruch *) ebenfalls als eine Zahl gezählt läßt, daß das Schluß-Resultat durch 5 Glieder sich vollkommen ins Reine bringen lasse.

Man muß nur hiebei auf den Ausgang des §. 58, zurük sehen, und denken, wenn die zwei Proportionen etwa so hiesen:

$$\begin{array}{rcrcr} 4 & : & 8 & = & 57 : n \\ 3 & : & 9 & = & n : x \end{array}$$

so ist $(4 \cdot 3) : (8 \cdot 9) = (57 \cdot n) : n \cdot x$

wie aus §. 58 gewiß jedem erhellen muß. Aber in den zwei lezten Gliedern kommt der Factor n zweimal vor. Er kann also sicher als 1 angesehen werden, und deshalb auch gar wegbleiben, weil nehmlich

$(57 \cdot n)$ zu $(n \cdot x)$ so viel, als $57 \cdot$ zu x gilt;

indem ja $(n : n) = 1 : 1$; und $\frac{57 \cdot n}{x \cdot n} = \frac{57 \cdot 1}{x \cdot 1}$

gleichviel bedeutende Ausdrücke sind. (Man sehe auch in §. 35 zurük). Ist nun aber dem so, muß das lezte Glied x allerdings nicht mehr als $\frac{8 \cdot 9 \cdot 57}{4 \cdot 3}$ betragen, d. h. es muß aus 5 Factoren vollkommen gebildet werden können.

*) In den 3 gegebenen Beispielen ist der Fall noch nicht vorgekommen. Er wird aber sogleich im nächsten eintretten.

gezählt werden kann) zureichen, um das lezte Schluß-Glied der IIten Proportion zu bilden. Die Stellung der 5 Zahlen hat gar keine Schwürigkeit, wenn man Gleichartiges zu Gleichartigem zusammen stellt, wie wir bisher angerathen haben; und in Formirung des lezten Schluß-Gliedes kann ebenfalls wohl nicht gefehlt werden, wenn man nur nie vergißt, was der

Punkt oder das Zeichen im 3ten Glied der IIten Proportion

bedeute, und vorstellen soll.

§. 78. Es ist nöthig, daß hier einem Einwurf begegnet werde, welchen mancher Anfänger über die bisherige Vorträge wohl machen dürfte, wenn er darinn von Unterlassung der Ausrechnung des 4ten Glieds in der Isten Proportion, und von Aufschub des Calküls bis in das Schluß-Glied der IIten Proportion liest. Er kann einwerfen: „Ich soll ja jede Haupt„frage, (wie die S. 211) in zwei andre Fra„gen zerlegen; die erstere dieser 2 andern Fra„gen erfordert doch eine Antwort. Diese Ant„wort wird in dem 4ten Glied der Isten Pro„portion ertheilt. Wie mag sie aber ertheilt „werden, wenn ich in dieses Glied blos einen „Punkt einzeichne? Ein Punkt ist ja keine „Antwort! Auch selbst, wenn ich blos die „Factoren einschreibe, so ist dies noch keine „Antwort!"

Dieser

Dieser Einwurf ist an sich ganz vernünftig. Allein man muß bedenken, daß die Vorschrift,

Mittel-Fragen zu entwerfen,

blos gegeben wird, um die Art und Weise befriedigend darzulegen, wie man zu dem Schluß-Glied gelange, welches die Hauptfrage beantwortet; daß aber den, welcher das Problem aufgiebt, die erste der gedachten Mittelfragen, wenig oder gar nicht interessire.

Z. B. in dem ersten Fall zeigt der Fragende für sich kein Verlangen, zu erfahren, wie viel Geld 8 Personen in 3 Monaten verzehren möchten; er will nur wissen, wie viel sie in 9 Monaten verzehren. Der Rechner befriedigt sein Verlangen; er sagt ihm, nach einiger Vergleichung der Sätze, 342 Gulden. Aber, wenn der Fragende Zweifel trüge, und sagte: „wie kommst du dazu? was führt dich auf die „342 Gulden?" so wäre der Rechner gar mit keinem Beweis der Richtigkeit seiner Angabe versehen, wenn er nicht das 4te Glied der 1sten Proportion ausgerechnet, oder dessen Betrag doch immer in Bereitschaft hätte.

Nimmt man nun an, der, welcher die Hauptfrage entwerfe, werde keine Neugier haben, die erste Mittel-Frage ebenfalls beantwortet zu hören, so kann man allerdings die einzelne Berechnung des 4ten Glieds der Isten Proposition ausgesezt seyn lassen, oder übergehen,

hen, bis etwa ein Zweifel eingelegt wird, ob auch die Schluß-Antwort gegründet seyn dürfte?

Dieses Uebergehen muß aber doch gleichsam markirt werden; und daher kommt eben die Bezeichnung mit einem Punkt, oder mit Δ. Die 5 Zahlen für sich rechtfertigen in der That die Schlußrechnung nicht unmittelbar. Wenn Rechtfertigung deutlich soll angegeben werden, so muß man sich wirklich über das 4te Glied der 1sten Proportion erklären, und bezeugen, daß es ein Product der mittlern Glieder, durch das 1ste dividirt gewesen sei, (in der Isten Proportion), daß es von da in das dritte Glied der IIten Prop. übergetragen, und von hier erst in das Schluß-Glied aufgenommen worden sei.

Der geübte Rechner, der die Ueberzeugung von dem allem einmal hat, kann natürlich die Aufstellung dieser Zahlen entbehren, bis in das allerlezte Glied, und kann daher, wie gedacht, blos mit den 5 Zahlen sich abgeben; aber er muß doch niemals vergessen, was weggeblieben ist, und warum es weggeblieben ist? — d. h. er muß die Gründe der zusammengezogenen Rechnung immerdar angeben können. In alten Rechenbüchern werden dieselbe sehr versteckt, und meistens unordentlich angezeigt.

§. 79. Durch mehrere Beispiele Anfänger zu üben, wird es nicht überflüssig seyn, wenn sie weiter folgende Fälle durchgehen:

Wenn

Wenn einem Fuhrmann 21 Gulden bezahlt werden, um 16 Centner 14 Meilen weit zu fahren, wie viel müssen ihm bezahlt werden, um 42 Centner 32 Meilen weit zu fahren?

Da muß man zuerst so fragen:

Auf 14 Meilen werden 21 Gulden bezahlt, wie viel auf 32 Meilen? Antwort: 48 Gulden. Dabei werden beedemal 16 Centner Last verstanden; welche Zahl aber in die Iste Proportion selbst nicht eingeschrieben wird. Diese heißt blos:

14 M.: zu 32 M. = 21 G.: zu 48 G.

Nun wird eine neue Frage entworfen, welche so entsteht:

16 Centner kosten 48 Gulden, (auf 32 Meilen weit) wie viel kosten 42 Centner, auf eben die Weite? Die Antwort ergiebt sich wieder durch eine einfache Regel de Tri.

16 Cent. zu 42 C. = 48 G.: zu 126 Gulden.

Die zwei Glieder, in welchen 48 steht, lassen sich auch hier blos durch Punkte bezeichnen, und man erhält die 2 Proportionen in Verbindung oder gleichsam zusammengeketet, in folgender Gestalt:

$$14 : 32 = 21 : \bullet$$

$$16 : 42 = \bullet : \frac{32 \cdot 21 \cdot 42}{16 \cdot 14}.$$

Das lezte Glied ist $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 42}{2 \cdot 7}$ d. i. $3 \cdot 42 = 126$.

Um

Und demnach sind 126 Gulden erforderlich, um den Fuhrmann zu befriedigen, wenn er 42 Centner auf eine Weite von 32 Meilen fortführen soll.

Man bemerke, daß in der Isten Proportion, der Saz nicht in die Rechnung als Zahl kommt:

„Die Last ist 16 Centner!"

ob er gleich der Behauptung zum Grunde liegt. Und daß in der IIten Proportion

der Saz nicht in die Rechnung (als Zahl) kommt:

„Die Weite ist 32 Meilen!"

ob er gleich der Behauptung zum Grund liegt, nehmlich der Behauptung, welche in der IIten Proportion asserirt oder ausgesprochen wird.

Auf dieses (stillschweigende) im Sinn Behalten zweier Sätze gebe man bei allen Beispielen, welche hieher gehören, wohl acht.

Einer hat 15 Arbeiter auszuzahlen. Sie hatten ihm $6\frac{1}{2}$ Tage gearbeitet; Er hatte ihnen 17 Kreuzer Taglohn versprochen. Wie viel hat er ihnen zusammen auszuzahlen?

Man bemerkt sogleich, daß die Frage auf Gulden ausgehen wird; und kann deshalb anstatt 17 Kr. setzen $\frac{17}{60}$ (Gulden).

Also *) wird sich zusammen ordnen lassen:

Arbei-

*) Man suche hier wieder sogleich den Saz auf, der in der Isten Prop. stillschweigend verstanden

den

Arbeiter Ihr Lohn

$$1 : 15 = \frac{1}{60} : \frac{15 \cdot 17}{60}$$

Zeit der Arbeit Ihr Lohn in bestimmter Zeit

$$1 : 6\frac{1}{2} = \frac{15 \cdot 17}{14} : \frac{15 \cdot 17}{60} \cdot \frac{13}{2}$$

Aber kürzer läßt sich schreiben:

$$1 : 15 = \frac{17}{60} : \cdot$$

$$1 : \frac{13}{2} = \cdot : \frac{15 \cdot 17 \cdot 13}{60 \cdot 2}$$

Das Schluß-Glied ist so viel, als $\frac{17 \cdot 13}{4 \cdot 2}$; das ist (221 : 8) oder $27\frac{5}{8}$ Gulden; Oder, ganz deutlich zu sprechen: 27 Gulden, $37\frac{1}{2}$ Kreuzer hat er zusammen auszuzahlen.

Man bemerke, wie leicht diese Ausrechnung von statten geht, wenn man blos $6\frac{1}{2}$ sich sogleich als $\frac{13}{2}$ denken mag; $\frac{15}{60}$ als $\frac{15}{4 \cdot 15}$ d. i. $\frac{1}{4}$ und endlich $\frac{5}{8}$ Gulden, als $37\frac{1}{2}$ (nach §. 64 S. 172). Uebrigens kann man auch wegen der Brüche auf die Nebenbemerkung in S. 218 zurükblikken.

Man werfe sich noch weiter die Frage auf:

300 Gulden werfen in 2 Jahren 30 Gulden Interesse ab; wie viel müssen $22\frac{1}{2}$ Gulden in 6 Jahren abwerfen?

Da würde gesezt:

300

den wird; er heißt: In einem Tag ist die Bestimmung des Lohns so! und sodann den Saz für die IIte Prop. Er heißt: „15 Arbeiter erhalten den Lohn!“ (Man sehe in die Note S. 211)

$$300 : 22\tfrac{1}{2} = 30 : \bullet$$

$$2 : 6 = \bullet : \tfrac{45}{2} \cdot \tfrac{30 \cdot 6}{300 \cdot 2} \bullet$$

Das lezte Glied bilde man um in $(\frac{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 10})$ das ist in $\frac{27}{4}$; so erhält man sogleich die Antwort auf die Hauptfrage: $6\frac{3}{4}$ Gulden, oder 6 Gulden, 45 Kr. ist das Interesse, nach welchem gefragt worden.

Anstatt der Punkte hat sich der Anfänger wohl die Brüche $(\frac{45}{2} \cdot \frac{30}{300})$ zu denken. Aber es wäre unnöthig, sie vorher zweimal zu schreiben, ehe man in das Schluß-Glied der IIten Proportion selbst kommt.

Noch eine ähnliche Frage: 348 Gulden werden zu 4 Procent auf Interesse ausgeliehen, nach 2 Monaten aber zurükgenommen, was betrug das Interesse in der kurzen Zeit?

Man schreibt:

Capital Interessen

$$100 : 348 = 4 : \bullet$$

Zeit der Verzins. Interess. in dies. Zeit

$$1 : \tfrac{2}{12} = \bullet : (\tfrac{348 \cdot 4 \cdot 2}{12 \cdot 100}) \bullet$$

Da 348 so viel, als 12 mal 29 ist, so wird aus dem lezten Bruch: $\frac{12 \cdot 29 \cdot 4 \cdot 2}{12 \cdot 25 \cdot 4}$, d. i. $\frac{29 \cdot 2}{25}$ oder $2\frac{8}{25}$ Gulden; dafür sich $2\frac{1}{3}$ Gulden annehmen läßt, weil $\frac{8}{25}$ und $\frac{8}{24}$tel eines Guldens sehr nahe an einander liegen, der lezte Bruch aber $= \frac{1}{3}$ beträgt. Das Interesse ist daher zu 2 Gulden, 20 Kreuzer anzunehmen.

§. 80. Aus diesen Beispielen zusammengenommen, erhellet wohl jedem nach und nach so viel:

Das lezte Schluß-Glied ist anzusehen, als ein Product von 3 Haupt-Factoren, welche aus den 3 mittlern Gliedern der 2 Proportionen genommen werden,

dividirt durch das Product der 2 vordern Glieder, oder der zwei Factoren, die vorne vertikal stehen.

Hiemit erhält jedes Glied die Benennung eines Haupt Factors, es bestehe nun kurz in einer ganzen Zahl, oder in einem Bruch, wie $(\frac{2}{1\,2})$, oder es sei zusammen gesezt, wie $(22 + \frac{1}{2})$ oder $\frac{45}{2}$.

Man sehe diese fünf Haupt-Factoren zu wiederholten malen aufmerksam an, und behalte wohl, wie die 3 mittlern, zu einem Product auszumachen, zusammen gehören, und die zwei vordern, um vereint einen Divisor dazu auszumachen.

Jeder wird hiernächst nun nicht in Abrede stellen können, daß, wenn man das lezte Schluß-Glied x nenne, dasselbe sich als ein Bruch denken lasse, in dessen Zähler 3 Factoren stünden, und dessen Nenner 2 enthielte. Man muß aber, wenn man dieses wahr finden will, die Glieder nehmen, wie sie sind, uneinge-

gerichtet, schlechthin, so daß z. B. ($22\frac{1}{2}$) gleich als eine ganze Zahl, nur wie ein Factor, betrachtet wird. Denn läßt man sich auf die Umbildung der Glieder sogleich ein, so kann der Bruch des Schluß-Gliedes auch in 6 Factoren bestehen, manchmal aber dagegen auch wieder nur in vier, auch wohl nur in drei; in zwei.

Man nehme das Beispiel:

$$300 : 22\tfrac{1}{2} = 30 : \cdot$$
$$2 : 6 = \cdot : x$$

$$(300 \cdot 2) : (22\tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 30)$$

Das sind 2 Factoren — Das sind 3 Factoren

Allerdings ist $\frac{22\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 30}{300 \cdot 2} = x$

Schreibt man aber $\frac{45}{2}$ für $22\frac{1}{2}$; so erhält man durch diese Umbildung schon 6 Factoren ($\frac{45}{2} \frac{\cdot 6 \cdot 30}{300 \cdot 2}$).

Auf diese Weise läßt sich demnach gewiß deutlich einsehen, in wieferne die Behauptung bestehe: das lezte Schluß-Glied (x) bestehe aus einem Bruch, dessen Zähler drei Hauptfactoren habe; der Nenner zwei.

Warum diese Behauptung aufgestellt werde, und was sie für Interesse in dieser Lehre habe, soll nun unmittelbar sogleich erläutert werden.

§. 81. Man stelle die 3 mittlern Factoren vertical (aus den zwei Proportionen ge-

nommen) unter einander hin; und darneben zur linken Hand die 2 Factoren, aus den zwei vordern Gliedern;

so erhält man zuerst:

$$\begin{array}{cc} \cdot & 22\frac{1}{2} \\ 300 & 30 \\ 2 & 6 \end{array}$$

$$(300 . 2) \;:\; (22\tfrac{1}{2} . 30 . 6)$$

oder in kleinern Factoren, indem man sogleich bemerkt, was sich aufhebt:

$$(10 . 1) \;:\; (22\tfrac{1}{2} . 1 . 3)$$

oder $10 \;:\; \frac{45}{2} . 3$

und denkt: Divisor hier : Dividend da.

Das Schluß-Glied ist $\frac{5 . 9 . 3}{2}$ div. durch $(5 . 2)$ oder $\frac{27}{4}$; eben der Quotient, welcher S. 225 vorgekommen, und allda gerechtfertiget worden.

Man gehe auf die Beispiele in §. 77 zurük, und nehme das vor, in dem es heißt:

$$4 : 7 = 57 : .$$
$$3 : 8 = . : x.$$

Ganz gewiß kann man auch so setzen:

$$\begin{array}{cc} & 7 \\ 4 & 57 \\ 3 & 8 \end{array}$$

$$(4 . 3) \;:\; (7 . 57 . 8)$$

und

und x ist $= \frac{7 \cdot 57 \cdot 8}{4 \cdot 3}$; woraus 7.19.2 oder 14.19, das ist 266 folgt, wie oben gezeigt worden.

Daß die vertikale oder Säulen-Stellung ganz und gar keine besondre Rechnungsmethode veranlassen kann, hievon überzeugt sich nun wohl ein jeder, der diese Stellung nur mit der horizontalen vergleichen mag. Dennoch hat man diese Art, die Glieder aus Proportionen herauszuheben, und so vertikal zusammen zu ordnen, mit der besondern Benennung beehrt, sie

den Reesischen Ketten-Saz zu heissen;

hat auch die Vorschriften, Zahlen, welche sich zerfällen lassen, in den kleinsten Verhältnisgrösen, in das Product einzuschreiben,

die Reesische Regel

genannt. Ein Holländer, Hr. v. Rees, hatte in einem Rechenbuch mit vielen Beispielen Belehrungen gegeben, wie die Grösen, welche in den Dividend, und die, welche in den Divisor gehören, zusammen zu setzen, und wie alsdenn durch Hebungen der Quotient am bequemsten zu finden wäre. Das Buch kam in der ersten Helfte unsers Jahrhunderts in holländ. Sprache heraus, und wurde hierauf ins Deutsche übersezt. Durch ein besonderes Geschik gerieth es, als ein vorzügliches Werk, in Aufnahme, und viele liessen sich überreden, es enthielte die ausgesuchteste Vorschriften, welche

nirgends anderswo so vorkämen, um kurz und schnell rechnen zu lernen.

Mehrere geschikte Arithmetiker gaben sich Mühe, dem Publikum diesen Wahn zu benehmen, und bewiesen aufs deutlichste, daß weder die Gründe des Reesischen Verfahrens etwas neues enthielten, noch daß dessen mechanisches Benehmen, mit zusammengesezten Zahlen (bei gemeinschaftlichen Factoren) schiklich umzugehen, als eine neue Erfindung angesehen werden dürfe. Indessen hat das Vorurtheil bis jezt obgesiegt, und man trägt sich einmal (zumal in der mercantilischen Welt noch ziemlich allgemein) mit dem Glauben, man müsse nach Reesens Manier die Sätze stellen lernen, und seine Combinationen und Hebungsweisen sich genau bekannt machen, wenn man ein gewandter Rechner werden wolle.

Ich finde keinen Anstand, dem Vorurtheil nachzugeben, in so weit man ihm, ohne der Wahrheit etwas zu vergeben, und ohne andre vernünftige und wohl bewährte Methoden zu verdrängen, nachgeben kann. Die vertikale Columnen-Stellung Reesens, ist etwas ganz unverfängliches; ihre Rechtfertigung läßt sich aber in der That nicht durchführen, wenn man nicht die Bildung zusammenhängender Proportionen, (in horizontaler Stellung, in Gliedern neben einander gefügt) zu Hülfe nimmt. Dieses ist, wie ich glaube, auf den lezten vier

Blät-

Blättern sattsam an den Tag gelegt worden, und wird sich noch mehr erweisen, wenn wir die Behandlung von drei bis vier, auch fünf zusammenhängender Proportionen werden auseinander gesezt, und die Reesische Columnen-Stellung auch bei diesen vermehrten Verhältnissen werden gezeigt haben.

§. 82. Ehe aber hiezu geschritten wird, müssen wir doch noch zuvörderst einige Bemerkungen über die Natur und innre Eigenschaft der mannichfaltigen Probleme machen, welche vermittelst der sogenannten Regel Quinque auf die Art, welche bis hieher erläutert worden, aufgelöst werden können.

Es kommen in allen den bisher angeführten Aufgaben drei Dinge vor, von welchen eines durch zwei andre bestimmt wird.

Zahlung, durch Last und Weg (od. Zeit), Arbeit, durch Vielheit von Kräften und Zeit.

Zehrung, durch Vielheit der Consumenten, und Zeit.

Interesse, (Renten) durch Grösse des Capitals und der Zeit.

So kann man allgemein setzen:

Wirkung, (Effect) wird durch Ursache und Zeit bestimmt.

Wer Mechanik versteht, dem werden auch sogleich mehrere Beispiele hiebei einfallen, in welchen ein

durchmessener Raum
mit Geschwindigkeit und Zeit

verglichen wird; auch

Grösse der Bewegung
mit Geschwindigkeit und Masse.

Hierüber kann ich mich hier nun nicht umständlicher auslassen, indem diese Erörterungen gar leicht auf mehrere Bogen auszudehnen wären; und eine vollständige ganz genügende Abhandlung über diesen Gegenstand ohne Buchstaben-Formeln, und Proportionen, welche ganz damit ausgedrükt werden müssen, und welche ich hier geflissentlich vermeide, sich nicht wohl schreiben läßt.

Blos darauf muß ich aber jezt meine Leser aufmerksam machen: Bei jeder ihnen vorkommenden Aufgabe, bei welcher sie bemerken, daß mehr als blos zwei Verhältnisse in die Rechnung kommen müssen, haben sie wohl darauf acht zu geben,

1stens, ob die Data des Problems auf drei ganz verschiedene Dinge hinaus lauffen, welche allgemein als

Ursache, Wirkung, Zeit,

z. E. { Capital, Interesse, Zeit,

sich angeben lassen? oder ob

2tens in der Aufgabe nur zwei ganz verschiedene Dinge vorkommen, von welchen aber das eine wegen gewissen Unterabtheilungen, oder Beziehungen auf ein gewisses (anders abgetheiltes) Aequivalent doch drei Verhältnisse veranlassen kann?

3tens Ob die Data des Problems keine umgekehrte Verhältnisse enthalten?

Alle aufgelöste Probleme von §. 75 an bisher, gehen Nr. 1 an. Bei deren Auflösung wird man durchgehends die Gesezlichkeit bemerkt haben, daß in den zwei ausgesezten Proportionen allemal

das 3te und 4te Glied der Isten Proportion und das 3te und 4te Glied der IIten Proportion gleichartig und gleichnamig seien. Man durchsehe nur die Sätze S. 212 und S. 214 nochmals, und man wird sich ohne weitern Anstand ganz zuverlässig hievon überzeugen.

Dieser Gang der Verhältnisse findet sich jederzeit, so oft die drei verschiedene Dinge sich auf die angegebene drei Momente reduciren lassen.

Aber nun laßt uns auch einige Aufgaben betrachten, welcher allererst hier oben

in Nr. 2 erwähnt worden, in denen nur zwei ganz verschiedene Dinge benannt werden, und bei welchen dennoch die Regula Quinque in der Ausrechnung anzuwenden ist.

§. 83. Wenn gefragt wird: Wie viel Batzen kosten 2 Pfund einer gewissen Waare, wenn der Centner 94 Gulden kostet? so ergiebt sich die Antwort vermittelst folgender zwei Proportionen:

$$100\ \text{Pf.} : \text{zu}\ 2\ \text{Pf.} = 94\ \text{G} : \text{zu}\ \tfrac{47}{25}\ \text{G.}$$

$$1\ \text{G} : \text{zu}\ \tfrac{47}{25}\ \text{G.} = 15\ \text{B} : \text{zu}\ \tfrac{47 \cdot 3}{5}\ \text{B.}$$

Das lezte Glied ist $28\frac{1}{5}$ Batzen.

Offenbar sind hier

das 3te und 4te Glied der Isten Prop.

und das 1ste und 2te Glied der IIten Prop.

gleichartige und gleichnamige Grösen. In dem Problem selbst waren die zwei wesentlich verschiedene Data blos

Geld

und Gewicht.

Aber beede haben Unterabtheilungen. Die des Geldes, Gulden und Batzen, hat allerdings eben die zwei Proportionen veranlaßt, in welchen die Anwendungen der Regel de quinque deutlich in die Augen fällt, wenn man die Glieder nicht alle ausschreibt, sondern blos so sezt:

Pfunde		Gulden
100	: 2 =	94 : .
Gulden		**Batzen**
1	: . =	15 : x

Eine andre Aufgabe sei folgende:

Vier Laubthaler betragen 24 französische Livres;

wie viel beträgt darnach 1 Livre?

So

So fragt man oft kurz; verlangt aber die Bestimmung des Livres in einer kleinern Geldsorte, als Laubthaler sind, zu wissen; In Kreuzern oder Batzen. Die Antwort ergiebt sich vermittelst folgender Verhältnisse:

Livres		Laubthaler
24 : 1	=	4 : $\frac{1}{6}$

Laubthaler		Kreuzer
1 : $\frac{1}{6}$	=	165 : $\frac{55}{2}$

woraus erhellt, daß $27\frac{1}{2}$ Kreuzer nach dem 24 Gulden-Fus 1 Französ. Livre gleich zu achten sind.

Diese Ausrechnung wird sich eben so finden, wenn man sezt:

Livres		Laubthaler
24 : 1	=	4 : .

Laubthl.		Batzen
1 : .	=	$41\frac{1}{4}$: $(\frac{165}{4} . \frac{1}{6})$

Der lezte Bruch beträgt $6\frac{7}{8}$ Batzen, welche eben das Aequivalent von $27\frac{1}{2}$ Kreuzer, und von einem französ. Livre sind.

Hier fallen die gleichnamigen Grösen niemals mehr in die zwei lezte Glieder der zwo Proportionen, wie sie in allen Beispielen von §. 75 bis §. 81. gefallen sind; sondern nur

das 3te und 4te Glied der Isten Prop.
und das 1ste und 2te Glied der IIten Prop.

enthalten Zahlen von einer Benennung, und Gattung.

Die

Die zwei wesentlich verschiedene Dinge, welche das Problem selbst angiebt, sind blos

französisches Geld,
und deutsches Geld

aber das leztere veranlaßt, wegen der Unterabtheilung der Laubthaler in Kreuzer oder in Batzen, die mehrern Verhältnisse, welche eben den Calkül zu Anwendung der Regel Quinque qualificiren.

Diejenige meiner Leser, welche über den Gang dieser zwei Auflösungen etwas nachgedacht haben, werden nunmehr den Unterschied wohl hinlänglich fassen, auf welchen ich S. 233 unter Nr. 2 sie aufmerksam zu machen gesucht habe. Vielleicht ist ihnen der erste allgemeine Vortrag daselbst nicht sogleich ganz vernehmlich gewesen; die darauf beigebrachten Beispiele mit den eingewebten Bemerkungen (auf dem vorigen Blatt) dürften aber doch (wie ich hoffe) die Stelle eines weitläuffigen Commentars, der dazu vielleicht vermißt worden, vertreten.

In vielen Rechenbüchern werden blos solche Aufgaben, als zur directen Regel Quinque gehörig, aufgeführt, welche ausschließlich unter Nr. 1 passen; dergleichen auch die in §. 75... 81 vorgelegte insgesammt gewesen sind. Allein die anders gearteten, in welchen die Sätze den Gang nehmen, den wir jezt aus dem lezten Blatt kennen gelernt haben, lassen sich doch ebenfalls

1) auf

1) auf zwo Proportionen beschränken,
2) durch 5 Grösen, (von 5 Verhältnis-Gliedern) in Rechnung ausführen, indem zwei identische Glieder blos durch Punkte angemerkt zu werden brauchen.

Die Anwendung der Regel Quinque eben auf die leztere Art von Sätzen leidet daher gar keinen Zweifel. Ich glaube diesemnach mit vollem Recht, (nur mit wohl bedachter Anführung des bemeldten Unterschieds, der die Natur der Probleme selbst angeht,) die lezten Beispiele unter die gedachte Regel reducirt, und alsdenn auf die angezogene Weise, der Natur der Sache gemäs, beleuchtet zu haben.

In Wechsel-Geschäften und bei unzähligen andern Rechnungs-Vorfällen kommen unendlich viele Fragen vor, deren Beantwortung Anfänger blos mittelst Anordnung zweier Proportionen, welche, wie die auf dem vorigen Blatt angeführte, beschaffen sind, sich geben können, bei welchen der Geübte aber mit 5 Sätzen schlechthin auskommt. Dergleichen Fragen gehen die in §. 75 ... 81 angeführte nichts an, lassen sich gar nicht darauf beziehen, und werden mittelst einer offenbar-verschiedenen Wendung aufgelöst. Aber wegen der Reduction der zu bearbeitenden Glieder auf die bestimmte Anzahl, Fünf, gehören sie doch billig unter die Vorschriften der Regel de Quinque.

Wie der Reesische Kettensaz vollends dabei anzuwenden sei, wird niemand wohl (nach dem,

dem, was bisher davon erläutert worden) weiter räthselhaft seyn können. Die Grösen der mittlern Glieder werden in die zur rechten Hand stehende Columne eingesezt, die der vordern Glieder in die zur linken. z. B.

		1 Livr.	
(4)	24 Livr.	: 4 Laubthl.	(4)
	1 Laubthl.	: 165 Kr.	

(6 . 1) : (3 . 55) . 1 . 1.
das ist: 2 : 55

Es bedarf also darüber weiters gar keiner besondern Vorschriften.

Laßt uns aber jezt auch auf den 3ten Punkt übergehen, auf welchen die Aufmerksamkeit der Leser in dem vorigen §.
unter Nr. 3 S. 233
aufgefordert worden ist.

§. 84. Es kann sich oft ereignen, daß eine vorgelegte Frage mehrere Bestimmungen enthält, welche den Rechner nöthigen einen
directen Regel de Tri Saz
mit einem verkehrten
zu verbinden, um das Problem gehörig aufzulösen. Die eine Proportion wird
nach den Lehren des VIIIten Abschnitts
die andre nach den Lehren des IXten
construirt werden müssen, um zu dem vorgesezten Ziele zu gelangen. Weil man aber, so bald die zwei Proportionen übereinander geord-

net

net stehen, unverzüglich wahrnimmt, daß zwei Glieder sich identisch zeigen, so wird man auch dabei wieder auf die Abkürzung hingeführt,

blos fünf Glieder in wirklicher Rechnung (compendiarisch)

zu behandeln.

Die Vorschriften, welche dabei in ziemlicher Menge gegeben zu werden pflegen, haben die alten Arithmetiker fast alle unter der Rubrik:

Praktik der verkehrten Regel Quinque, (s. de Regula de Quinque conversa)

vorgetragen. Ihre Ausübung sezt die meisten Anfänger in vielfältige Verlegenheiten. Ich will mich bemühen, denselben durch nachfolgende Auseinandersetzungen vorzubeugen, welchen (so viel mir bekannt ist), in gewöhnlichen Anleitungen zur Arithmetik bisher kein Plaz vergönnt worden ist. Bei Vorlegung bestimmter Probleme werden sich, (wie ich denke) diese Erläuterungen am besten beibringen lassen:

Es sei folgende Frage vorgelegt: Wenn ein Fuhrmann 16 Centner einer gewissen Waare 14 Meilen weit um 21 Gulden abführt, wie weit wird er 42 Centner für 126 Gulden führen?

Man bemerkt wohl hier sogleich, daß eine Proportion nicht zulänglich sei, um den Betrag von Meilen anzugeben, nach welchem gefragt wird. Wie werden aber die zwei Proportionen

dann

dann zu formiren seyn, in welcher die IIte durch ihr lezres Glied die Auflösung des Problems geben muß?

Die Iste wird blos directe Verhältnisse enthalten;

Die IIte aber umgekehrte.

Man kann nehmlich von den Datis, welche das Problem selbst angiebt, Anlaß nehmen, sein Raisonnement, wie folgt, beginnen zu lassen:

Für 21 Gulden werden 16 Centner einen gewissen Weg *) weit fortgeführt; wie viel Centner können für 126 Gulden eben so weit geführt werden? Antwort 96 Centner, indem ja die Verhältnisse so zu nehmen sind:

21 Guld. zu 126 G. = wie 16 Cent. zu 96 Cent.

und 126 so viel, als 6.21 beträgt; daher ((6.21.16):21) oder = 6.16; eben 96 ausgiebt.

Diese erste Frage wurde freilich nicht von dem aufgeworfen, welcher das Hauptproblem aufgab; dann dieser combinirte sogleich 126 Gulden mit der Abfuhr von 42 Centnern. Allein wir werden sogleich das, was er eigentlich

*) In der Geschichte des Problems ist zwar dieser Weg sogleich bestimmt angegeben; 14 Meilen. Allein die Zahl 14 kann in der Isten Proportion noch nicht angebracht werden, ob sie gleich stillschweigend eben darinn (als suppositum) verstanden werden mag.

lich wissen will, beantworten; haben aber die Beantwortung der eingeschobenen Mittelfrage eben dazu nöthig.

Wir wissen jezt: Für 126 Gulden lassen sich 96 Centner eine gewisse Weite führen. Diese Weite sei auf 14 Meilen bestimmt; Wenn das Geld so bestimmt bleibt, (die 126 Gulden), die Zahl der Centner aber verringert, also dem Fuhrmann viele Last abgenommen werden soll, so daß er anstatt 96 Centner nur 42 Centner übernähme, so wird er dafür allerdings (der Billigkeit nach) um so weiter fahren, d. i. die wenigern Centner viel mehr, als nur 14 Meilen weit, fortführen müssen. Es werden also hiebei umgekehrte Verhältnisse eintreten, indem die Vorstellungen sich gar nicht abwenden lassen.

Um so weniger Last, um so längerer Weg.

Also kommen wir damit wieder auf die Vergleichung hinaus, welche §. 71 bis § 74 beleuchtet worden, bei der es immerdar heißt:

Um so weniger da, um so mehr dort.

Die zweite Frage wird diesem allem nach so gesezt werden müssen:

96 Centner führt er 14 Meilen weit; wie viele Meilen weit wird er eine Last von nur 42 Centner führen müssen?

und die Verhältnisse werden dem §. 73 gemäs so zu stellen seyn:

42 : zu 96 = 14 Meil. zu x.

Natürlich muß $x = \frac{14.96}{42}$ oder $\frac{14.6.16}{7.6}$, das ist: 32 Meilen betragen. Man muß auch hiebei den Hauptgedanken darauf wenden:

96 Centner, 14 mal genommen,
und 42 Centner, x mal genommen,

müssen eine Gleichung abgeben, weil eine gleiche Summe Geldes (126 Gulden) bei beeden (ungleichen) Lasten, und bei beeden (ungleichen) Wegen, als identische Zahlung, angenommen wird. Damit wird ein gleiches Product die Combination veranlassen:

$$(96.14) = (42.x)$$

und aus diesen 4 Factoren folgt, (insoferne 96.14 die mittlern 2 Glieder einer geometr. Proportion abgeben sollen, und x das lezte Glied) nothwendig die Zusammenordnung, ganz nach §. 73, so:

$$42 : 96 = 14 : x$$

oder $42 : 96 = 14 : 32$.

Hiemit ist nun die Hauptfrage, welche zu allererst vorgelegt worden, beantwortet: 32 Meilen weit muß der Fuhrmann 42 Centner (für 126 Gulden) führen.

Laßt uns jezt die zwo Proportionen neben einander stellen, und ihre Glieder vergleichen:

21 G : 126 G = 16 C : 96 C.
42 C : 96 C = 14 M : 32 M.

Gleich-

Gleichartiges steht auch hier wohlgeordnet beisammen.

Schreibt man aber diese übereintreffende Glieder, wie (in §. 77) in Factoren, und das Schluß-Glied ebenso, noch unausgerechnet, so kommt man wiederum darauf, daß eben damit eine complicirte Gröse dreimal geschrieben würde, welche man die 2 erste mal wohl nur durch Punkte andeuten kann. Nehmlich anstatt

$$21 : 126 = 16 : \frac{126 \cdot 16}{21}$$

$$42 : \frac{126 \cdot 16}{21} = 14 : \frac{126 \cdot 16 \cdot 14}{21 \cdot 42}$$

kann man allerdings blos setzen:

$$21 : 126 = 16 : \ldots$$

$$42 : \ldots = 14 : \frac{126 \cdot 16 \cdot 14}{21 \cdot 42}$$

Die Rechtfertigung dieses Benehmens ist ganz ebendieselbe, welche bereits in §. 78 beigebracht worden; und auch die Vortheile, welche durch Aufsparung der Ausrechnung bis in das lezte Schluß-Glied sich ergeben, sind dann natürlich ebendieselbe. Man schreibe das lezte Glied, um die Schluß-Gröse bequem zu erhalten, wie folgt:

$\frac{3 \cdot 42 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 7}{42 \cdot 3 \cdot 7}$; so ergiebt sich damit $\frac{16 \cdot 2}{1}$.

oder 32; weil sich alles bis auf 16. 2 hebt.

§. 85. Hiemit sind wir vorbereitet genug, einzusehen, wie sich nach Reesischer Art die 5

Zahlen Columnenweise setzen lassen, und wie eben dasselbe Resultat herauskommen müsse.

		126 (42)
21 (7)	:	16
42 (42)	:	14 (7)
3.1	:	3.16.2
1	:	16.2.

Die Zahlen in den Klammern deuten auf die Divisionen, welche in zwei und zwei Zahlen gemeinschaftlich sind, und also sichre Verkleinerung veranlassen. Der geübte Rechner wird dadurch in den Stand gesezt, unter den Horizontal-Strich sogleich die kleinsten Factoren unterzusetzen; und, sollte ihm dieses auch etwa nicht immer auf einmal glücken, so wird er doch eine sehr kurze Nacharbeit alsdenn noch übrig haben, wie eben hier jeder, der den Divisor (3.1) und den Dividenden (3.16.2) vor sich sieht, gewiß im zweiten Augenblik erkennt, daß sich auch 3 : 3 vollends heben, und also blos: (16.2) div. durch 1 noch übrig seyn können, welches = 16.2 oder 32 selbst ist.

Manche Arithmetiker beschweren Anfänger mit besonders ausgedachten Regeln, welche den Verirrungen vorbeugen sollen, daß man nicht Zahlen (des Problems) in die linke Columne setze, welche in die rechte gehören, und umgekehrt. Wenn man aber die Bildung ganzer Proportionen sich angewöhnt, gleichartiges zusammendenkt, und die Verhältnisse darnach

nach combinirt, so ist Verirrung beinahe nicht möglich; wenigstens bedarf es keiner besonders erklügelter Vorschriften, sondern blos etwa bei umgekehrten Verhältnissen der Ueberlegungen, welche in dem IXten Abschnitt empfohlen worden, und zu welchen die gesunde Vernunft jeden Rechner, ohne Special-Regeln, hinleitet.

§. 86. Laßt uns noch einige Beispiele vor die Hand nehmen, bei welchen die Probleme auf ähnliche Weise mit Bestimmungen versehen sind, welche 2 Proportionen veranlassen, von denen die zweite einen verkehrten Regel de Tri-Saz begreift.

Einer mahlt in $3\frac{3}{4}$ Stunden 3 Malter Kern auf zwei Mahl-Gängen. Er wünscht in 10 Stunden mit 20 Maltern fertig zu werden. Wie viel Gänge müssen ihm abgegeben werden, wenn dieses angehen soll? (Dabei wird vorausgesezt, daß die Gänge gleich weit fördern.)

Man nehme die Ueberlegung dahin:

Es seien einmal nur zwei Gänge vorhanden. Drei Malter werden in $3\frac{3}{4}$ Stunden gemahlen. Wie viele Stunden erforderten wohl 20 Malter, auf denselben zwei Gängen? Antwort: 25 Stunden.

Denn die Iste Proportion giebt, wenn sogleich $\frac{15}{4}$ für $3\frac{3}{4}$ geschrieben wird:

3 M : zu 20 M = $\frac{15}{4}$ St : zu 25 St.

In 25 Stunden würde man also auf 2 Mahlgängen *) mit 20 Malter fertig.

Je mehr Mahl-Gänge von dem Müller hergegeben werden, um so früher wird man natürlich mit dem Mahlen fertig. Also stößt man damit schon wieder auf eine umgekehrte Verhältnis:

Je mehr Gänge, um so kürzere Zeit.

Die kürzere Zeit ist auf 10 Stunden bestimmt. Binnen derselben sollen die 2 Malter gemahlen seyn, und zwar auf x Gängen. Vorher sind 25 Stunden angegeben; während derselben sind eben die 20 Malter gemahlen, und zwar auf 2 Gängen. Also muß wohl die Gleichung statt haben:

$$(25 . 2 = 10 . x)$$

indem man den Gedanken fest zu halten hat:

zwei Gänge, 25 mal genommen } od. so lange
x Gänge, nur 10 mal genommen } beschäftigt.

und das Resultat doch gleich. (Da müssen ja wohl der Gänge um so mehr seyn, wenn dieses möglich seyn soll.) Aus der Gleichung folgt aber:

$$10 : \text{zu } 25 = 2 : \text{zu } x$$

womit

*) Die Anzahl der Mahlgänge (2) kommt nicht in der Isten Proport. als Zahl vor. Aber in der IIten kommt sie im 3ten Glied vor. Dagegen kommt die Zahl der 20 M. nicht in der IIten vor. Vergl. S. 240.

womit $x = \frac{25 \cdot 2}{5 \cdot 2}$, das ist $= 5$ sich ergiebt; Fünf Gänge muß der Müller hergeben, damit der Mühl-Gast in 10 Stunden mit 20 Maltern fertig werde.

Jezt ordne man wieder die Proportionen so zusammen:

$$3\,\mathfrak{M} : 20\,\mathfrak{M} = \tfrac{15}{4}\,\mathfrak{St.} : \tfrac{20 \cdot 15}{4 \cdot 3}\,\mathfrak{St.}$$
$$10\,\mathfrak{St.} : \tfrac{20 \cdot 15}{4 \cdot 3}\,\mathfrak{St.} = 2\,\mathfrak{G.} : x\,\mathfrak{G.}$$

Da kommt abermals eine und ebendieselbe Gröse in dem 4ten Glied der Isten Proportion vor, und in dem 2ten Gl. der IIten Proportion. Man kann daher kürzer schreiben:

$$3 : 20 = \tfrac{15}{4} : \ldots$$
$$10 : \ldots = 2 : \tfrac{20 \cdot 15 \cdot 2}{10 \cdot 3 \cdot 4}$$

wo man gar schnell ersieht, daß sich alles bis auf $\frac{25}{5}$ d. i. bis auf 5 aufhebe.

Nun schreibe man wieder einmal alles nach Reesischer Manier:

$$\begin{array}{rrl} & 20\ (10) & \\ 3\ (3) & \tfrac{15}{4}\ (3) & \\ 10\ (10) & 2 & \\ \hline 1 \cdot 1 & : & (2 \cdot \tfrac{5}{4} \cdot 2) \\ \text{d. i. } 1 & : & 5 \end{array}$$

so erfährt man, wie viel Gänge nöthig seien, auch auf diesem Wege, wie vorher.

Hiebei mag sogleich bemerkt werden, daß, so oft ein Bruch in der einen Columne vorkommt, dessen Nenner darinn ausgestrichen,

oder lieber gar weggelassen werden, dagegen aber als eine ganze Zahl in die andre eingeschrieben werden mag *), damit man überall ganze Zahlen erhalte. Z. B. bei $\frac{15}{4}$ kann man die Säulen so ändern:

3	20
4	15
10	2

(1.2.1) : (2.5.1)

wo 4 auf 2 bezogen wird, und anstatt 4 : 2 sogleich unter den Strich (2 : 1) kommt.

Daß diese Uebertragung des Nenners von Brüchen immer angehe, läßt sich sehr leicht einsehen. Denn, wenn der Bruch in der Columne zur rechten Hand steht, so muß man bedenken, daß er der eine der Factoren des Dividen-

*) In manchen Fällen kann man auch, wenn zumal der Nenner eine kleine Zahl ist, denselben sogleich mit der ganzen Zahl der andern Columne, welche dem Bruch gegen über steht, multipliciren, so daß z. B. hier gesezt würde

12 : 15

weil 3 die conträre Zahl (zur linken Hand) heißt, und 3 mal 4 = 12 beträgt.

Oefters dürfte aber durch diese unmittelbare Multiplication ein doppeltes Geschäfte veranlaßt werden, da man nehmlich das neue Product etwa bald darauf von neuem in Factoren zu zerlegen hätte. In dem Fall wird man besser thun, blos die Factoren nebeneinander (3.4) in einer Klammer zusammen zu schreiben, oder sie vertical zu stellen.

videnden ist; daß aber jeder Dividendus, welcher so aussieht,

$$\frac{20 \cdot \frac{15}{4} \cdot 2}{3 \cdot 10} \text{ gleich sei } = \frac{20 \cdot 15 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 10}$$

wie schon oben in der Anm. zu §. 53 gezeigt worden. Ist dem nun so, fällt jedem in die Augen, daß 4 in die Columne geschrieben werden müsse, in der 3 und 10 stehen, das ist: in die linke, falls man nehmlich überall nur ganze Zahlen, in den beeden Säulen haben will. Der geübte Rechner weis sich aber auch eben so leicht zu helfen, wenn Brüche untermischt in jeder Columne vorkommen; und ist nicht eben genöthigt, durchaus die Nenner so überzutragen.

§. 87. Ein neues Beispiel sei ferner folgendes: zwei Männer mähen 15 Morgen in 5 Tagen; Es sollen 36 Morgen gemäht werden, in 8 Tagen; wie viel braucht man Männer dazu?

Zuerst denke man an keine verschiedene Anzahl von Mädern; sondern spreche blos:

15 Morgen erfordern 5 Tage Mäh-Arbeit; wie viel erfordern 36 Morgen? Antwort: 12 Tage.

15 M : 36 M = 5 T : 12 T.

So viel ließe sich durch 2 Männer mähen. Aber nun seien, weniger als 12 Tage einmal ausgesezt, nur 8 Tage; so wird man bald schliessen:

Je weniger Tage, um so mehr Arbeiter!

Daher die IIte Proportion sich so muß setzen lassen:

8 T : 12 T. = 2 : x

das ist = 2 : zu 3

Denn 2 Männer, 12 mal } beschäftigt
und 3 Männer 8 mal }
müssen ein Werk beendigen, die 36 Morgen nehmlich abmähen. Daraus die Gleichung eben folgt

2 . 12 = 8 . x

welche die IIte Proportion selbst veranlaßt hat.

Auch diese Proportionen lassen sich so schreiben:

15 : 36 = 5 : .

8 : . = 2 : x

wo der, der nur einigermassen geübt ist, schwerlich die 3 Zahlen der mittlern Glieder mehr ganz in den Zähler schreiben wird, in dem er aus den 2 ersten Gliedern 15 auf 5, und 8 auf 36 und 2 im zweiten Augenblik beziehen dürfte; so daß er etwa wohl schon zuerst setzen möchte:

$\frac{18 . 1 . 1}{3 . 2}$ d. i. $\frac{18}{6} = 3$.

In dem Reesischen Säulen-Saz ersieht man das nehmliche; oder man kann auch 8 auf 36 und 2, durch Zerfällung in (4 . 2) beziehen:

		36	(4)	
15	(5)	5	(5)	
8	(42)	2	(2)	
3 . 1		: 9 . 1 . 1		

wo $\frac{9}{3} = 3$ die verlangte Grösse angiebt.

Folgendes Beispiel beschliesse diese Reihe:

Einer legt 30 Gulden so an, daß er damit in 4 Jahren 18 Gulden gewinnt. Er äussert sich hierauf dahin: Hätte ich 75 Gulden eben so angelegt, so würde ich noch vor Abschluß von 3 Jahren 32 Gulden gewonneu haben. Nun wird gefragt, wie sich die Zeit, die nicht gar 3 Jahre demnach erreicht, bestimmt finden lasse?

Ueberlegung. Die 18 Gulden, und die 32 Gulden denke man als gewisse Zinse oder Renten, nach einerlei Procenten *) bezogen; und denke sich zuerst beede Bezüge, von einer Zeit, vom Anfang der 4 Jahre, bis an deren Ende berechnet.

Man wird also sagen können:

18 Gulden Zinse werden erhoben, aus 30 Gulden Anlage;

32 Gulden, aus welcher Anlage? Aus $53\frac{1}{3}$ Gulden; heißt die Antwort.

$18 : 32 = 30 : 53\frac{1}{3}$.

Bin-

*) Die Berechnung giebt 15 Procente. Diese Zahl kommt aber nicht selbst in der folgenden Rechnung vor.

Binnen 4 Jahre erhält man also aus $53\frac{1}{3}$ Gulden die Zinse (den Gewinn daraus) mit 32 Gulden.

Aus 75 Gulden soll gleicher Gewinn, nehmlich 32 Gulden, erfolgen.

Wenn ebendieselbe Procente bleiben, so muß natürlich eine kürzere Zeit hiebei angenommen werden, als 4 Jahre, weil, wie wir schon wissen, $53\frac{1}{3}$ Gulden (nicht 75) in 4 Jahren schon 32 Gulden abwerfen. Die kürzere Zeit nenne man: x Jahre; so wird man die Gleichung nicht befremdlich finden:

$$(53\tfrac{1}{2}) \cdot 4 = 75 \cdot x.$$

Denn $(53\frac{1}{2})$ viermal, wirft 32 Gulden im Ertrag aus; und (75) x mal, soll eben die Zahl auswerfen *).

Anstatt 4 mal, und x mal kann man sich denken:

4 Jahre beschäftigt, benüzt, gleichförmig umgetrieben;

und eben so x Jahre umgetrieben.

So bald man aber nur einmal diese Gleichung zugesteht, so bald wird man auch die Proportion, welche daraus fliest, zugestehen müssen:

75 G zu $53\frac{1}{3}$ G = wie 4 J : zu x.

Man

*) Auch dabei ist es räthlich, an die Umkehrung der Verhältnisse zu denken: Um so mehr Capital, um so weniger Zeit (ist zu 32 G. erforderlich).

Man stelle die beeden Proportionen nunmehr unter einander hin; sie heissen:

Intereſſen		Capital
18 : 32	=	30 : $53\frac{1}{3}$
Capital		**Jahre**
75 : $53\frac{1}{3}$	=	4 : x.

Ohnleugbar ist allen vorhergehenden Berechnungen gemäs, (indem man für $53\frac{1}{3}$ zweimal blos Punkte einschreiben darf)

$$x = \frac{32.30.4}{18.75} = \frac{16.8}{9.5} = \frac{128}{45}$$

womit man $(2 + \frac{38}{45})$ zum Quotienten erhält; und damit erfährt, daß 75 Gulden bei eben den Procenten die 32 Gulden Zinse binnen 2 Jahren, und $\frac{38}{45}$tel eines Jahres abwerfen werden. Wie viel der Bruch in Monaten betragen, läßt sich nun vollends durch eine einfache Regel de Tri erfahren:

$$1 \text{ Jahr} : \text{zu } \tfrac{38}{45} \text{ J} = 12 \text{ Mon} : \left(\tfrac{38.3.4}{3.15}\right) \text{Mon.}$$

Das lezte Glied ist $10\frac{2}{15}$ Monat; oder 10 Monat, 4 Tage.

Nach dem Reesischen Verfahren wird man die Columnen so zu seßen haben:

	32
18	30
75	4

$$9.25 : 16.10.4$$
$$\text{das ist: } 9.\ 5 : 16.\ 8$$

womit man wieder $\frac{128}{45}$ zum Quotienten erhält.

Man

Man sieht überall, daß das Reesische Verfahren leicht von statten gehe, wenn man die Proportionen zu bilden versteht. Versteht man aber dieses nicht, so lassen sich kaum Regeln genug geben, um in den Säulen-Sätzen niemals zu irren.

§. 88. In den vier Beispielen, welche von §. 84 an bis hieher, aufgeführt worden sind, und vermittelst welcher jezt doch wohl hinlänglich am Tage liegt, wenn und wie die sogenannte

verkehrte Regel Quinque

angewendet werden müsse, haben sich die Stellungen der Glieder, wann zwei vollkommene Proportionen ausgesezt worden, allemal so geordnet gezeigt, daß

das dritte und vierte Glied der Isten Prop. und das erste und zweite Glied der IIten Prop. gleichartig und gleichnamig waren.

Z. B. in § 84 liefen die Verhältnisse so hin:

Gulden zu Gulden = wie Centn. zu Centn.
Centn. zu Centner = wie Meilen zu Meil.

Die Auflösung aller dieser Aufgaben, (auch andrer, welche den vorgelegten ähnlich sind) ist aber gar nicht auf diese Gesezlichkeit schlechthin beschränkt. Die Proportionen müssen nicht ganz nothwendig also geordnet werden, um das verlangte Resultat heraus zu bringen.

Man

Man kann vielmehr jede dieser Fragen auch (gleichsam) von einer andern Seite angreiffen, und zwei Proportionen formiren, in welchen

das 3te und 4te Glied der Isten Prop.

und das 3te und 4te Glied der IIten Prop.

gleichartige und gleichnamige Grösen enthalten, so daß die Form der Proportionen die nehmliche ist, wie bei Problemen, welche unter die directe Regel Quinque gehören, und welche von der Natur der §. 75 bis §. 81 aufgeführten sind, von welchen das Memorandum Nr. 1 in §. 82 insbesondre Erwähnung thut.

„Wie mag das zugehen? (dürfte vielleicht „mancher Leser hier fragen). Die Behauptung „klingt beinahe, wie ein zum Spielen vorgewor„fenes Geheimnis."

Wer die Geduld hat, die nächsten drei oder vier Blätter, welche sogleich folgen sollen, mit Aufmerksamkeit zu durchgehen, wird sich gar bald überzeugen, daß hier von keiner Spielerei sondern von einer sehr ernsthaften Uebung des Verstandes die Rede sei, daß die vorgetragene Behauptung einen sehr bestimmten Sinn habe, und daß sie auf ganz unverwerflichen Gründen beruhe.

Laßt uns jedes der vier Probleme, welche uns von §. 84 an bis hieher beschäftigt haben, eines nach dem andern, noch einmal vor die Hand nehmen, und bei jedem einzeln darthun, daß es sich auf mehr, als nur einer Seite angreiffen,

sen, in zwei Unter-Aufgaben zerlegen, und mittelst zwei andrer Proportionen, als die schon angeführten waren, dennoch jedesmal rechtlich auflösen lasse.

Das erste Problem (in §. 84) hat also geheissen:

Ein Fuhrmann führt 16 Centner 14 Meilen weit, um 21 Gulden; wie weit muß er 42 Cent. für 126 Gulden führen?

Das Problem läßt sich zuverlässig nicht blos allein durch die Proportionen:

21 G : zu 126 G = wie 16 C : zu 96 C

42 C : zu 96 C = wie 14 M : zu 82 M

auflösen; sondern auch durch folgende:

21 G : zu 126 G = wie 14 M zu 84 M

42 C : zu 16 C = wie 84 M zu 32 M.

Man kann nehmlich bei der Aufgabe seine Gedanken nicht allein den Weg nehmen lassen, welcher in §. 84 angegeben worden, sondern auch den nächstfolgenden:

Es müssen 21 Gulden für 14 Meilen ausgelegt werden; die Auslage von 126 Gulden, wird also wohl zu einer weitern Fuhr gehören; aber auf wie viele Meilen weiter? ist die erste (einzuschiebende) Frage? Antwort: Auf 84 Meilen. Denn

21 : zu 126 = wie 14 : zu 84.

Dabei wird vorausgesezt, daß das Gewicht

der

der Fracht durchgehends ohne Aenderung 16 Centner betragen hatte.

Allein, nun tritt die zweite Frage ein: Wie? wenn (anstatt 16 Centner) 42 Centner angenommen würden, wie viele Meilen würde diese Last für die 126 Gulden geführt werden können? Natürlich keine 84 Meilen mehr, insoferne ja die Betrachtung hier eintreten muß:

Je mehr Last, um so kürzerer Weg; bei einer und ebenderselben Zahlung.

und die Antwort blos durch eine Umkehrung der Verhältnisse

16 Centn : 42 Centn.
84 Meil : x Meilen

in die nachfolgende Ordnung:

42 Centn : 16 Centn.
84 Meil : x Meilen

sich richtig erhalten läßt *). Dieses ist den im IXten Abschnitt gegebenen Erläuterungen vollkommen gemäs. Damit ergiebt sich aber die Proportion, in welcher das lezte bisher unbekannte Glied ausgerechnet steht:

42

*) Man kann auch hiebei wieder die zwei gleiche Producte sich vorstellen:

16 . 84 = 42 . x

und dabei etwa so denken: 16 Centn. 84 mal in Zeit genommen, muß so viel betragen, als 42 Centner, x mal in Zeit genommen, weil in beeden Fällen die Auslage nicht mehr, als 126 Gulden seyn soll. In hoc uno tertio conveniunt. Daher die Gleichung.

42 ℂ : 16 ℂ = 84 ℳ : 32 ℳ.

Stellt man nun die beede Proportionen zusammen, so fällt in die Augen, daß das dritte und vierte Glied in der Isten und in der IIten Prop. gleichartige und gleichnamige Grösen angehen:

21 𝔊 : 126 𝔊 = 14 ℳ : 48 ℳ
42 ℂ : 16 ℂ = 84 ℳ : 32 ℳ.

Und hiemit ist eben dargethan, daß sich das Problem nicht nur auf dem in §. 84 gezeigten Weg, sondern auch auf diesem auflösen lasse, und daß nach dieser zweiten Methode die Stellung der Glieder ganz eben so ausfalle, wie die Stellung bei der directen Regel Quinque in allen den von §. 77 bis 81 angeführten Fällen statt gefunden hat.

§. 89. Laßt uns nun zu dem zweiten Beispiel übergehen, welches in §. 86 vorgelegt worden. Das allda stehende Problem läßt sich zuverlässig auch, wie folgt, auflösen.

3 Mlt : 20 Mlt = 2 𝔊 : $\frac{40}{3}$ 𝔊
10 St : $\frac{15}{4}$ St = $\frac{40}{3}$ 𝔊 : 5 𝔊.

Man kann nehmlich seine Gedanken folgenden Weg nehmen lassen:

3 Malter werden auf 2 Gängen gemahlen; wie viel Gänge werden 20 Mltr. erfordern? Wenn die Beschränkung auf eine und ebendieselbe Zeit, auf $3\frac{3}{4}$ Stunden, bliebe, so käme

man

man auf $13\frac{1}{3}$ Gänge hinaus. So unnatürlich dieser Ausspruch lautet, so ist dennoch die Zahl des lezten Gliedes hinzusetzen: $13\frac{1}{3}$ oder $\frac{40}{3}$. Nun wird aber eine längere Zeit eingeräumt, für die 20 Malter, nehmlich 10 Stunden. Wie viel Gänge werden wohl nach diesem Zugeständnis noch erforderlich seyn. Weniger als 13, weil allerdings die Ueberlegung eintritt:

Je mehr Zeit, um so weniger Gänge.

In den zwei Verhältnissen

$3\frac{3}{4}$ Stunden : 10 Stunden
$13\frac{1}{3}$ Gange : x Gänge

werden deshalb die ersten zwei Glieder umgewendet werden müssen, so daß die Proportion formirt werde:

$$10 \text{ St.} : \tfrac{15}{4} \text{ St.} = \tfrac{40}{3} \text{ G.} : x \text{ G.}$$

Und eben diese Proportion zu der durch die erste Frage veranlaßten hinzu geordnet, wird daher das Resultat geben: 5 Gänge müssen bei Annahme von 10 Stunden erforderlich seyn.

Welche zwei Glieder in dem Calkül selbst blos mit Punkten (ohne Zahlen) nur angemerkt werden können, wird aus obigen Erklärungen ohne Mühe abzunehmen seyn. In der kürzesten Gestalt würde die Rechnung blos so aussehen:

$$3 : 20 = 2 : \bullet$$
$$10 : \tfrac{15}{4} = \bullet : \tfrac{20 \cdot 15 \cdot 2}{10 \cdot 3 \cdot 5}$$

Das lezte Glied ist $\frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{4}$; das ist: 5 ohne Bruch.

Die zwei Aufgaben in §. 87 lassen sich gleichförmig nun ebenso (nach diesem 2ten Ideen-Gang) auflösen: Man lese die erste, von den Mähern: Folgende zwo Proportionen führen so gut, als die S. 250 angeführte, zum Ziele:

15 Morg : 36 Morg = 2 Männ : $\frac{24}{5}$ M.

8 Tage : 5 Tage = $\frac{24}{5}$ Männ : x M.

Das 4te Glied der IIten Prop. giebt 3 Männer an.

Die zwei Probleme, in welche das Hauptproblem zerlegt worden, heissen da so:

15 Morgen erfordern 2 Männer, wie viel erfordern 36 Morgen? Antwort: $\frac{24}{5}$ oder $4\frac{4}{5}$ Männer; nehmlich wenn auf der Zeit von 5 Tagen bestanden würde. Es werden aber jezt 8 Tage zugestanden. Wie viel Männer werden alsdenn nöthig seyn, um die 36 Morgen zu mähen? Antwort nur 3. Denn die Verhältnis-Grösen:

5 Tage : 8 Tage

$\frac{24}{5}$ Männ. : x Männer

müssen in die Proportion zusammen geordnet werden:

8 T : 5 T = $\frac{24}{5}$ M : 3 M.

Das lezte Problem, welches S. 251 erläutert worden, wird uns jezt nicht lange mehr auf-

aufhalten. Um dasselbe aufzulösen, kann man die zwei Proportionen nicht nur, wie sie S. 252 stehen, sondern auch so formiren:

Interessen
18 G : 32 G. = 4 Jahre : $\frac{64}{9}$ J.

Capital
75 G : 30 G. = $\frac{64}{9}$ Jahre : $\frac{128}{45}$ J.

Dabei müssen folgende Vorstellungen statt finden:

Es werden 18 Gulden in vier Jahren gewonnen, 32 Gulden, in wie viel Jahren? Antwort in $7\frac{1}{9}$ Jahren; nehmlich, wenn eine gewisse Anlage, (in der Aufgabe ist sie benannt, ein Capital von 30 Gulden) gleichförmig fort rentirte. Nun aber wird eine grössere Anlage, ein Capital von 75 Gulden angenommen, und gefragt: in wie viel Jahren hätten sich damit die benannte 32 Gulden gewinnen lassen? Antwort in $\frac{128}{45}$ J. oder in $2\frac{38}{45}$ Jahren.

Denn 30 Gulden, $7\frac{1}{9}$ mal in Zeit genommen,
und 75 Gulden, x mal in Zeit genommen,
müssen gleiche Producte seyn, weil bei beeden Annahmen 32 Gulden Gewinn herauskommen soll. Aus diesen Aequivalenten:

$$(20.\frac{64}{9}) = (75.x)$$

folgt daher die Bildung der IIten Proportion ohne Widerspruch.

Die Ansicht von beeden, wenn sie zusammen geordnet werden, zeigt abermals, daß

das 3te und 4te Glied in der Isten Prop. und das 3te und 4te Glied in der IIten Prop. gleichartige und gleichnamige Grösen enthalten.

Hiemit ist dann der in §. 88 S. 254 gethanen Zusage, wie ich denke, ein vollständiges Genüge geschehen, und es liegt jezt am Tage, daß der eine Weg eben so sicher und eben so leicht zum Ziele führe, als der andre, so oft Probleme vorgelegt werden, deren Lösung vermittelst der sogenannten

verkehrten Regel Quinque

bewirkt werden kann.

Wie die Reesische Methode (in der bekannten Form) auch hiebei anzubringen sei, bedarf am Schluß dieses Abschnitts keiner weitern Auseinandersetzung. Des Raums wegen werden wohl billig hier Wiederholungen von Sätzen umgegangen, welche fast blos aus §. 84 bis §. 87 wieder abgeschrieben werden müßten, wenn so große Ausführlichkeit verlangt, und etwa (von jemand, ohne genugsame Prüfung) für nothwendig erachtet werden sollte.

XI. Abschnitt.

Von Zusammenordnung dreier (auch mehr) connexer Proportionen, und Anwendung der Reesischen Regel dabei.

§. 90.

Die Gründe sind nunmehr hinlänglich vorgelegt, auf welchen die Zusammenziehung zweier Proportionen in eine einzige beruht. Auf ebendenselben Gründen beruht die Zusammenziehung dreier Proportionen ebenfalls in eine. Die Belehrungen, welche am Schluß des VIIten Abschnitts in §. 58 vorgetragen worden sind, mögen jeden überzeugen, daß allemal zwo Proportionen in eine einzige zusammengeworfen werden können, und zwar namentlich durch Multiplication aller einzelnen Glieder, auch wenn oft eines von dem andern in Grösse nicht verschieden ist. Steht nun einmal eine neue Proportion da, wie die S. 150 angeführte,

15 : 180 = 28 : 336

so kann man unter diese wieder eine andre sezen, und alsdenn wieder Glied für Glied multipliciren. Damit wird sich abermals eine vollkommene geometrische Proportion ergeben; welche in Hinsicht auf die vorhergegangene Operationen ohne Zweifel angesehrn werden kann, als

eine aus drei Proportionen zusammen gezogene einzige.

Gewiß giebt doch z. B. die Zusammenstellung

15 zu 180 = 28 zu 336
2 zu 5 = 4 zu 10

30 : 900 = 112 : 3360

eben so viel aus, als die:

3 zu 6 = 7 zu 14
5 zu 30 = 4 zu 24
2 zu 5 = 4 zu 10

30 : 900 = 112 : 3360

Der Beweis, daß man durch Multiplicationen von drei geometrischen Proportionen immer wieder auf eine geometrische hinaus komme, ist diesemnach natürlich ebenderselbe, welcher schon in §. 58 beigebracht worden.

Sobald man von der Richtigkeit dieses Satzes nun im Allgemeinen überzeugt ist, so kann man sogleich wieder an Abkürzungen, oder Verkleinerungen der Verhältnis-Zahlen denken.

Eben so viel als

30 zu 900 = 112 zu 3360

ist (3.10) zu (90.10) = (56.2) zu (168.10.2)

oder kürzer:

3 zu 90 = 56 zu 1680

und noch weiter, eben so viel ist:

1 zu 30 = 4.14 zu 4.420.

Das

Das lezte Verhältnis 14 zu 420 reducirt sich ohne Schwürigkeit auf 2 zu 60; und von da auf 1 zu 30 selbst.

Diese successive Umbildungen sind aber beschwerlich. Wie kann man derselben wohl entbehren? (Ganz oder doch zum Theil.) Antwort: Wenn man vor der Multiplication der verticalen (ober einander stehenden) Glieder diese einzeln aufmerksam betrachtet, und nachdenkt, aus welchen Factoren sie bestehen. Bei kleinen Zahlen läßt sich dieses immer bald errathen; bei grössern, wie die Producte selbst sind, wenn sie einmal ausgerechnet da stehen,) viel langsamer.

Man nehme also, in dem lezten Beispiel, nur die hintern Glieder vor sich, und denke

7	zu	14	ist so viel als	7 : 2.7
4	zu	24		4 : 4.6
4	zu	10		4 : 2.5

Da sich nun auch $4 = 2.2$ schreiben läßt, so ist schnell zu übersehen, daß eben so viel, als

(7.4.4) : zu (4.4.7.6.5)
(1.1.1) : zu (1.1.1.6.5) sei;

weil es nehmlich nicht darauf ankommt, in welcher Ordnung die Factoren stehen, und $\frac{7}{7} = \frac{1}{1}$ gilt; $\frac{2.4.2}{4.4}$ aber ebenfalls $\frac{1}{1}$ bedeutet. Die Folgerung auf die Verhältnis 1 zu (6.5), oder 1 : 30 ist alsdenn spielend leicht, weil 1.1.1 so viel, als 1 beträgt.

Eben so kann man mit den 6 vordern (verticalen) Gliedern verfahren.

Wem noch Zweifel hierüber aufstosen möchten, der sehe in §. 58 insbesondre in die dortige Nr. 3 zurük, wie auch in die Note des §. 77 S. 218. Das Daseyn gemeinschaftlicher Factoren macht allemal Abkürzung der Verhältnis-Zahlen möglich; darauf läuft immer alles hinaus.

§. 91. In der Anwendung kommen sehr viele Fälle vor, welche drei Proportionen von der Beschaffenheit veranlassen, daß

das 4te Glied der Isten Prop.
und das 2te Glied der IIten Prop.

eine und ebendieselbe Zahl, und daß auch wieder

das 4te Glied der IIten Prop.
und das 2te . . der IIIten

wieder eine und ebendieselbe Zahl ist *).

Wo das zutrift, kann man grose Abkürzung der Rechnung anbringen, und das lezte Schluß-Glied (x) blos durch 7 Hauptfactoren, zur Rechnung gebildet, darstellen. (in einzelnen Fällen selbst durch weniger, als 7, noch)

Z. B. Es käme vor:

3 zu 6 = 7 zu 14
5 zu 14 = 10 zu 28
2 zu 28 = 9 zu x

so

*) Zwei solche Proportionen beziehen sich allemal für sich auf eine Aufgabe, welche von der Art und Natur ist, worüber in §. 82 (sub Nr. 2) und weiter in §. 83 commentirt worden.

so kann man allemal dafür schreiben:

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & : & 6 & = & 7 & : & . \\ 5 & : & . & = & 10 & : & . \\ 3 & : & . & = & 9 & : & x \end{array}$$

$$(3.5.) : 6 = (7.10.9) : x$$

und die gesuchte Schluß-Größe

x muß $= \frac{6.7.10.9}{3.5.2}$ seyn,

so daß vier Factoren im Zähler, und drei im Nenner stehen, (zusammen sieben) *).

Beweis.

Man nehme die 2 erste Proportionen zuerst allein vor; und setze also:

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & \text{zu} & 6 & = & 7 & \text{zu} & 14 \\ 5 & \text{zu} & 14 & = & 10 & : & y. \end{array}$$

Gewiß ist nach den vielfachen Belehrungen, welche im ganzen vorigen Abschnitt vorkommen, ganz eben so viel:

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & : & 6 & = & 7 & : & . \\ 5 & : & . & = & 10 & : & \frac{6.7.10}{3.5} \end{array}$$

Das lezte Glied ist die ganze Zahl 28, weil 3 und 5 sich heben; deshalb dann (2.7.2) zum Vorschein kommt, d. i. 4 mal 7, oder 28.

Die zwei erste Proportionen heissen also in eine zusammen gezogen:

$$(3.5)$$

*) Die weitre Abkürzungen sollen uns jezt sogleich nicht beschäftigen, damit unsre Aufmerksamkeit nicht von dem Beweis des Hauptsatzes selbst abgezogen werde.

$$(3 \cdot 5) : 6 = (7 \cdot 10) : 28$$
$$\text{oder } 15 : 6 = 70 : 28.$$

Nun gehe man an die 3te Proportion, und schreibe sie vertical

$$\text{unter } 15 : 6 = 70 : 28$$
$$\text{so hin: } 2 : 28 = 9 : x.$$

Ganz gewiß wird man wieder für 28 in diesen 2 Proportionen blos Punkte einsetzen dürfen, so daß nur hingestellt werden darf

$$15 : 6 = 70 : .$$
$$2 : . = 9 : x$$

$$(15 \cdot 2) : 6 = (70 \cdot 9) : x$$

womit dann wieder zwo Prop. in eine zusammengezogen, erscheinen. Nothwendig folgt hieraus;

$$x = \frac{6 \cdot 10 \cdot 9}{15 \cdot 2} \text{ oder } \frac{6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 5 \cdot 2}$$

und damit stehen dann eben die Zahlen vor Augen, welche man erhält, wenn in den 3 Proportionen sogleich anstatt der Zahlen vier Punkte in den angezeigten Gliedern eingeschrieben, oder dieselbe als x angesehen, und daraufhin die Glieder multiplicirt werden.

Eine wiederholte Durchsicht des §. 58 und der Note zu §. 77 wird jedem die Zweifel alle zerstreuen, welche sich je noch hiegegen einstellen möchten.

Jeder angehende Arithmetiker muß sich die Zusammenordnung von drei Proportionen,

in

in denen die Stellen der identischen Glieder eben die sind, welche das lezte Beispiel hier angiebt, besonders wohl merken. In der praktischen Anwendung kommen die Aufstellungen eben solcher Proportionen unzähligemal vor, und der Mechanismus der daraus folgenden Abkürzungen muß allen Rechnern, (zumal im Kaufmann-Stand) durchaus bekannt seyn. Man kann aber niemals deutliche Begriffe mit demselben verbinden, wenn man die Folge der Gründe nicht erwägt, welche vor allem die Paragraphen §. 58 §. 77 und §. 83 an die Hand geben.

Eine Reihe praktischer Beispiele mag nun folgen, und den Nutzen der theoretischen Lehre bestätigen;

§. 92. Es wird gefragt: Wie viel Simri Dinkel (rauhe Frucht, Spelz) werden zu 100 Pfund Brod erfordert? wenn die Voraussetzungen bekannt sind, daß 32 Sri rauhe Frucht 13 Sri glatte, oder Kern *) in der Gerbmühle ausgeben; und aus 2 Sri Kern 3 Sri Mehl sich mahlen lassen; 1 Sri Mehl aber zu 24 Pfund Brod zureiche.

Die verlangte Ausrechnung ergiebt sich durch drei Proportionen, wie folgt:

Pfunde

*) Um blos ganze Zahlen in diese Rechnung zu bekommen, ist so gesezt. Im gemeinen Leben spricht man: 8 Sri Dinkel geben $3\frac{1}{4}$ Sri Kern. Die Grundverhältnis ist ebendieselbe.

Pfunde Brod		Simri Mehl
24 : zu 100	=	1 : zu .
Simri Mehl		Simri Kern
3 : zu .	=	2 : zu .
Simri Kern		Simri Dinkel
13 : zu .	=	32 : zu X

Die verlangte Gröse ist

$$X = \frac{1.2.32.100}{24.3.13} \text{ d. i. } \frac{800}{3.39}$$

Also lautet die Antwort $(6 + \frac{98}{117})$ Sri Dinkel sind nöthig, um 100 Pfund Brod daraus backen zu können, insoferne die angegebene Mittel-Sätze richtig, und auf gute Erfahrungen gegründet sind.

Der Bruch über die 6 Sri fällt zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{8}$, wie eine besondre Nachrechnung ausweist *); bei welcher wir uns aber gegenwärtig nicht aufhalten wollten.

In den drei zusammengestellten Proportionen kommen vier Punkte vor. Aus dem vorhergeh. Abschnitt, auch aus §. 91 muß deutlich genug, was der Anfänger darunter zu denken habe, erhellen.

Der

*) Man findet diesen Betrag, indem man entweder noch einen Regel de Tri-Saz aufstellt, z. B. 1 Sri. giebt 4 Invel oder Vierling, wie viel geben $\frac{98}{117}$ Sri? oder noch bequemer, wenn man den Bruch in Decimalen sucht. Davon wird unten gehandelt werden.

Der Punkt im 4ten Glied der Isten Prop. bedeutet $\frac{100}{24}$; Eben so viel der Punkt im 2ten Glied der IIten Proportion.

Der Punkt im 4ten Glied der IIten Prop. bedeutet: $\frac{2.100}{24.3}$; Eben so viel der Punkt im 2ten Glied der IIIten Prop.

Der Anfänger wird immer wohl thun, wenn er diese zwei Brüche besonders ausrechnet, auf ein Nebenblättchen schreibt, und alsdenn successiv den Innhalt der drei Proportionen also ausspricht:

(I) Es erfordern 24 Pfund Brod 1 Sri Mehl; also 100 Pfund erfordern $4\frac{1}{6}$ Sri Mehl.

(II) 3 Sri Mehl erfordern 2 Sri Kern; also $4\frac{1}{6}$ Sri Mehl erfordern $2\frac{7}{9}$ Sri Kern.

(III) 13 Sri Kern erfordern 32 Sri Dinkel; also $2\frac{7}{9}$ Sri Kern werden $6 + \frac{98}{117}$ Sri Dinkel erfordern.

Gar oft alles so auszusetzen, ist aber nicht nothwendig; Schon beim 2ten oder 3tenmal leuchtet wohl jedem ein, daß die Ausrechnung der Schluß-Glieder $4\frac{1}{6}$ und $2\frac{7}{9}$ eine Arbeit sei, welche sich umgehen lasse, daß man dafür gar wohl blos Punkte oder andre Zeichen setzen, und dennoch sicher den Betrag des Schluß-Glieds finden könne. Aber, was die Punkte seien, was sie eigentlich vorstellen sollen, mus nur ja niemals gar vergessen werden. Gewöhn-

wöhnlich treibt man die Anfänger so frühzeitig in den Mechanismus hinein, daß sie dieses fast nothwendig vergessen müssen; ja gar viele angehende Rechner erhalten nicht einmal die Anleitung, die bestimmte Stellung dieser Punkte nur sich vorzustellen.

Noch folgende Bemerkung ist hiebei doch nicht ganz zu umgehen: Die zwei erste Punkte bedeuten nicht, was die zwei folgende bedeuten. In unserm Beispiel ist die Geltung der zwei ersten $4\frac{1}{6}$; und die der 2 lezten $2\frac{1}{9}$. Dieser Verschiedenheit wegen, wäre es daher auch immer räthlich, anstatt der Punkte, welche sich alle gleichen, zwei verschiedene Zeichen, oder Buchstaben einzusetzen; z. B. m und n; so daß darnach die 3 Proportionen in folgender Gestalt geschrieben würden:

24 zu 100 = 1 zu m
3 zu m = 2 zu n
13 zu n = 32 zu x.

In dem Schluß-Resultat fallen sodann m und n allemal weg, und bloße Zahlen, gehörig zusammen geordnet, geben den Betrag von x, (der gesuchten Größe) aus.

So wohl gegründet aber auch diese Bemerkung ist, so werde ich dennoch in allen folgenden Beispielen die Buchstaben m und n vermeiden; (1) weil noch allzu viele Arithmetiker ein Zahlen-Exempel, in welchem das Auge 3 verschiedene Buchstaben erblikt, scheuen, und

sich

sich einmal nicht damit abgeben wollen; (2tens) weil sich wirklich im Mechanismns der Arbeit die zwei verschiedene Buchstaben entbehren lassen, und endlich (3tens) vermittelst der Einzeichnung der Punkte, allein, die drei Proportionen ein Aussehen erhalten, durch das man am allerleichtesten zu Formirung des Reesischen Kettensatzes hingeleitet wird. In der lezten Hinsicht keinen Fehler zu begehen, wird ein für allemal für die allerwichtigste Kunst in der ganzen angewendeten Rechenkunst gehalten, und es sind deshalb selbst eine ziemliche Menge Regeln ausersonnen worden, welche in der That alle entbehrt werden können, wenn man drei Proportionen, nur so, wie gezeigt worden, zusammen zu stellen versteht, und die Gründe der Ordnung gefaßt hat. Hievon sollen noch viele Proben vorgelegt werden; Man erwäge sogleich, was über den Reesischen Saz unmittelbar folgen soll:

§. 93. Die angegebene Zahl für ebendieselbe Aufgabe, welche in dem vorhergehenden §. aufgelöst worden, werden nach der Reesischen Methode so geschrieben:

		100 Pf. Br.
(8)	24 Pf. Br.	1 Sri M.
	3 Sr. M.	2 Sri K.
	13 Sri K.	32 Sri D. (8)

3.3.13 : 100.2.4

woraus sich wieder $\frac{800}{3 \cdot 39} = x$ ergiebt; und, weil sich keine Zahlen weiter heben, so daß der Dividend 800 durch 117 dividirt werden muß, der Quotient folgt: $6\frac{98}{117}$, wofür man $6\frac{5}{6}$ annehmen kann.

Die Gründe dieser Zusammenstellung liegen offenbar in der Ordnung der 3 Proportionen, und die Abkürzung kommt von Weglassung der Glieder her, welche wir oben S. 270 durch Punkte angezeigt haben.

Die Columne linker Hand enthält die 3 erste (vordre) Glieder der 3 Proportionen;

Die Columne rechter Hand enthält die mittlern Glieder, deren man aber nur vier eingeschrieben findet, weil die blos punktirten Glieder bei dieser Methode gar durch keine Zeichen angedeutet werden.

Bei der Erwägung, daß sich 24 als 3.8, und 32 als 4.8 denken läßt, wird unter die Columne des Divisors (zur linken) blos 3, anstatt 24, (neben 3.13) unter den horizontalen Hauptstrich, und unter die Columne des Dividenden, und eben den Strich blos 4 anstatt 32 geschrieben (neben 100.2). Die Ursache sieht jeder Anfänger schon ein, weil $\frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{3}{4}$ oder (3:4) ist.

Einige Rechenmeister haben sogenannte Special-Regeln ausgedacht, welche vorschreiben:

„Mit

„Mit welcher Zahl jede Columne zur rech„ten anfangen, mit welcher sie schliessen „solle.

Was zuerst oder hauptsächlich gefragt wird, und die Zahl von Dingen, die dabei angegeben steht, die muß (heißt eine solche Regel) oben an in die rechte Columne geschrieben werden, wie hier: 100 Pfund Brod. Und die Zahl gleichartiger Dinge, welche weiter in der Aufgabe genannt werden, (heißt es ferner) die muß in die Columne zur linken kommen, aber um ein Glied tiefer stehen! —

Wer bei jeder Aufgabe die Bildung der 3 Proportionen denkt, wenn er sie auch nicht immer niederschreiben mag, der kann hierüber gar nicht irren. Das Product der mittlern Glieder in der Isten Proportion besteht aus 2 Factoren, von welchen einer in der Columne rechter Hand oben an stehen muß; welcher? das ist in der Rechnung ganz gleichgültig; und in der That fällt beinahe jeder ins Lächerliche, der sich für berufen achtet, darüber zu fechten. Das Resultat ist eben dasselbe, ob z. B. in dem gegebenen Fall mit 100 oder mit 1 oben angefangen wird. Die Zusammenstellung der gleichartigen Dinge kann hier nicht beobachtet werden, wie bei Verhältnissen, deren je zwei und zwei in vollkommnen Proportionen vorkommen. Im Reesischen Saz ist auf diese Combination nicht zu sehen, weil die punktirte Glieder fehlen.

Indessen giebt es doch einige Lehrer, welche eben darauf antragen, und die Columnen, wie folgt, geformt wissen wollen:

24	Pf.	Br.	100	Pf.	Br.
1	Sri	M.	3	Sri	M.
13	Sri	K.	2	Sri	K.
			32	Sri	Dink.

Dabei wird also die Columne linker Hand um ein Glied höher gerükt, und reicht nicht ganz so weit herunter, als die Columne rechter Hand.

Das kann jeder halten, wie er es gut findet, wenn er nur einsieht, in welche Proportion jede der Zahlen, die er schreibt, gehöre. Wenn man nach der lezten Vorschrift die Columnen schreibt, so kommen zwei Glieder horizontal und gegen einander über zu stehen, welche wirklich nicht in eine Proportion gehören, und in dieser Hinsicht allein möchte doch die Stellungsweise vorzuziehen seyn, welche im Eingang dieses §. angezeigt worden ist, und nach welcher auch alle obige Sätze in dem vorigen Abschnitt in §. 80 und §. 87 geordnet worden sind.

§. 94. Zweites Beispiel: Einer hat $22\frac{1}{2}$ Reichsthaler Auslagen für 1 Centner Waaren; Er verkauft die Waaren einzeln, und giebt jedes Pfund für 24 Kreuzer. Nun wird gefragt: Wie viel hat er Procente gewonnen?

da

da ihm der ganze Centner für den leztgedachten Preis abgieng?

Ehe man an die Rechnung geht, muß man zuerst die Bestimmung des Centners in Pfunden wissen; Es können 100, auch 104, auch 108 Pfund auf einen Centner gerechnet werden. Man nehme hier 100 Pfunde an.

Alsdenn muß man, da die Frage auf Procente geht, allemal sich vorstellen, daß eine Auslage von 100 (hier Thalern) gemacht worden, oder doch hätte gemacht werden können; und hierauf stillschweigend die Frage einschieben:

„$22\frac{1}{2}$ Reichsth. Auslagen haben einen ge-
„wissen genannten Profit zur Folge ge-
„habt; wie vielen Profit würde die Aus-
„lage von 100 Thalern abgeworfen haben?

Wenn man zuvörderst diese Gedanken wohlgeordnet durchgegangen hat, wird man ohne Mühe zu der Bildung folgender Proportionen schreiten können:

Reichsthaler		Pfunde
$22\frac{1}{2}$ zu 100	=	100 : .
Pfunde		**Kreuzer (Erlös)**
1 zu .	=	24 zu .
Kreuzer		**Reichsthaler**
90 : .	=	1 : X.

Das lezte Glied ist

$$X = \frac{100.100.24.1.2}{1.90.45} = \frac{10.100.8.3.2}{5.9.9}$$

woraus sich gar leicht $\frac{3200}{27}$ schreiben läßt. Der Quotient ist: $118\frac{14}{27}$ Rthlr. So viel wäre erlöst worden, wenn der Waarenhändler nicht blos $22\frac{1}{2}$ Rthl. sondern 100 Rthl. ausgelegt hätte, um Waaren derselben Gattung einzukaufen. Ein Ueberschuß über 100 Thlr. von $18\frac{1}{2}$ Rthlrn. wäre also sein Gewinn gewesen; (denn der Bruch $\frac{14}{27}$ ist wohl ohne weitern Calkül dafür auszulegen, indem ja schon $\frac{14}{28}$ wirklich $\frac{1}{2}$ beträgt).

Dieser jezt genannte Ueberschuß giebt also die verlangte Procente an. Und damit ist das Problem aufgelöst.

Nach der Reesischen Methode hätte man, wie folgt, geschrieben:

(3)	$\frac{45}{2}$ Rthl.	100 Rthl.	(10)
	1 Pf.	100 Pf.	
(10)	90 Krz.	24 Krz.	(3)
		1 Rthlr.	

15.9 : 10.200.8

Daraus 3.9 : 400.8 folgt;

von da aus alsdenn der Schluß auf den Bruch $\frac{5200}{27}$ keine weitre Schwürigkeit haben kann.

Der geübte Rechner hätte, anstatt $\frac{45}{2}$ und 100 gegen einander über zu setzen, wahrscheinlich sogleich 45 und 200 geschrieben. Man sehe nach, was hievon bereits oben in §. 86 angemerkt worden.

§. 95. Drittes Beispiel. Einer hat im Würtenbergischen für $7\frac{1}{2}$ Eimer Wein 124 Gulden ausgelegt; und fragt sich selbst, wie theuer muß ich die Maas wohl ausschenken, wenn ich an dem Weinkauf 100 Gulden gewinnen sollte?

Vor der Rechnung muß erwogen werden 1) daß ein Würtenb. Eimer 160 Würtenb. Maas hält; 2) daß nach dem Betrag von 1 Maas hier gefragt wird, also 1 das zweite Glied der ersten Proportion heissen muß *); 3tens, daß der Fragende eine Einnahme von (124 + 100) Gulden, d. i. von 224 Gulden, wünscht, oder im Auge hat, und deren Thunlichkeit bei dem Calkül voraussezt. Nach dieser Betrachtung wird die Stellung folgender Verhältnisse durch keine Schwierigkeiten weiter aufgehalten werden:

Maas Wein		Würtenb. Eimer
160 zu 1	=	1 zu .
Eimer		Gulden
$\frac{15}{2}$ zu .	=	224 zu .
Gulden		Kreuzer
1 zu .	=	60 zu x

Der Betrag von x ist $(\frac{224 \cdot 60 \cdot 2}{160 \cdot 15})$ Kreuzer. Das ist: $\frac{112 \cdot 4}{4 \cdot 10}$ oder $11\frac{2}{10}$ Kreuzer; dafür

*) Wenn man nehmlich auf die Bemerkung Rükſicht nimmt, welche erſt auf S. 276 gemacht worden.

der Wirth wohl entweder 12 oder 11 Kreuzer ohne Bruch ansetzen; im lezten Fall aber auch nicht ganz 100 Gulden bei dem Ausschank gewinnen wird.

Nach der Reesischen Methode wird gesezt werden:

		1	
(4)	160	1	
(15)	14	224.2	(4)
	1	60	(15)
	40	: 112.24	

das ist: 10 : 112

woraus $11\frac{1}{5}$ Kreuz. folgt.

Viertes Beispiel.

Jeder, der diese Aufgabe aufgelöst hat, kann Versuchung haben, zu fragen:

Wenn der Wirth 124 für $7\frac{1}{2}$ Eimer Wein auslegt, und die Maas einzeln für 11 Kreuzer (ohne Bruch) ausschenkt, wie viel Procent gewinnt er dabei?

Hiebei muß man, wie in dem vorherg. §. bemerkt worden, sogleich wieder die Auslagen denken 124 Gulden, und 100 Gulden, und daher setzen:

Auslag. in Guld.			Eimer Wein
124	zu 100	=	$7\frac{1}{2}$ zu .
Eimer			Krz. für die Maaße
$\frac{1}{160}$	zu .	=	11 zu .
Kreuzer			Gulden
60	zu .	=	1 zu x.

Die

Die Antwort heißt: Er würde für 100 Gulden Auslage beziehen:

$$100 . \frac{15.11.160}{2.124.60} = \frac{50.15.44}{31,6} \text{ oder } \frac{5500}{31} \text{ Gulden.}$$

Die Division giebt: $177\frac{13}{31}$ G. woraus die Antw. folgt: Etwas über $77\frac{1}{2}$ Proc. ist an dem Wein gewonnen.

Nach der Reesischen Methode schreibt man:

(2)	2	100
	124	15
	1	11
(10)	60	1
	...	160 (2.10)

1.124.6 : 1500.11.8
31 : 500.11

woraus sich ebendasselbe Resultat leicht ergiebt.

Die Vergleichung der einzelnen Zahlen in den zwei Columnen, läßt sich auf verschiedene Weise nehmen, wie aus den vorgelegten Sätzen jeder schon selbst abnehmen kann. Nehmlich der eine Rechner wird z. B. die Zahlen 60 und 160 ins Auge fassen, und die Verkleinerung darauf nehmen: 6:16 oder 3:8. Ein andrer Rechner wird aber 60 und 15 dafür in der Combination vorziehen, und alsdenn, weil ihm dieses oft vorkommende Verhältnis wohl bekannt ist, 4:1, dafür schreiben.

Keiner der beeden Rechner ist vor dem andern zu tadeln; es kommt auf die oben oder unten in der Columne stehende Zahlen an, ob die gewählte Verhältnis-Zahlen die zweckmäsigsten

waren. Dem einen kann eine Verkleinerung bequem oder geläuffig seyn, welche es dem andern nicht ist. Ueber die nöthige Klugheit dabei lassen sich keine ganz hinlängliche Vorschriften mittheilen. Ohnleugbar führt Uebung zu dieser Klugheit; Aber Kenntnis von Factoren-Zerfällungen und von deren Unmöglichkeit bei Prim-Zahlen, befördert sie.

Uebrigens kann hiebei noch angemerkt werden, daß die Berechnung des lezten Beispiels auf vier Proportionen würde ausgedehnt worden seyn, wenn die einzelne Maas, welche in dem Problem selbst vorkommt, nicht als $\frac{1}{160}$tel eines Eimers direct wäre aufgeführt worden, ohne die Reduction auf Maase namentlich in besondern Gliedern beizubringen. Nehmlich die zweite Proportion hätte sich wohl so bilden lassen:

Eimer Maas
$\frac{1}{160}$ zu . = 1 zu .
Maas Kreuzer
Alsdenn 1 zu . = 11 zu .
woraus man sieht, daß die lezte Proportion
Kreuzer Gulden
60 zu . = 1 zu x
die vierte worden wäre.

Diese Ausdehnung hätte aber keinen Nuzen gehabt, und auch im Reesischen Saz ohne Noth blos die Columnen verlängert.

§. 96.

§. 96. In kaufmännischen Wechsel-Geschäften kommen die Verbindungen dreier Proportionen am allerhäufigsten vor. Oefters ist aber der Vortrag der Aufgabe (die Proposition), selbst so concis, daß man nicht sogleich erkennt, ob drei oder nur zwei Proportionen nöthig sind, um die Frage zu beantworten. Wenn man indessen nur die zwei erste Verhältnisse einmal wohlgeordnet hingestellt hat, und alsdenn überdenkt, wie die zwei lezten Verhältnis-Glieder in der Schluß-Proportion heissen müssen, so kann man in Ansehung der mittlern kaum fehlen.

Fünftes Beispiel.

Zu Leipzig gelten die Laubthaler (Part) 1 Thal. 14 GGr.. Es ist dazu bekannt, daß sie gegen Ducaten, welche zu $2\frac{3}{4}$ Thlr. genommen werden, $11\frac{1}{4}$ Procent Verlust geben; wie viel Stücke Ducaten betragen 1000 Laubthaler?

Hiebei ist es sogleich räthlich, 1 Thal. 14 GGr. als $1\frac{7}{12}$ Thaler, oder unter einem Nenner, als $\frac{19}{12}$ Thaler zu denken, weil 24 GGr. einen Thaler ausmachen, und $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ beträgt.

Alsdenn heißt die allererste Frage so: Ein Laubthlr. gilt $1\frac{7}{12}$ Sächs. Thaler; wie viel werden 1000 Laubthlr. gelten? Die weitre Rechnung ist hiernächst, wie folgt, zu führen:

Laub-

Laubthal.		Sächs. Thal.
1	zu 1000 =	$\frac{19}{12}$ zu .

Sächs. Thal.		Thal. in Ducaten
$111\frac{1}{4}$ zu .	=	100 zu .

Thal. in Ducat.		Ducaten: Stücke
$2\frac{3}{4}$ zu .	=	1 zu X.

Man bemerkt wohl bald, daß es auch für $111\frac{1}{4}$ räthlich gewesen wäre, sogleich $\frac{445}{4}$ zu schreiben; und für $2\frac{3}{4}$ sogleich $\frac{11}{4}$.

Diese Umbildung vorausgesezt, ergiebt sich

$$X = \frac{1000 . 19 . 100 . 4 . 4}{12 . 445 . 11} = \frac{19000 . 20 . 4}{3 . 89 . 11}$$

weil nehmlich 445 so viel als $5 . 89$ ausmacht; und $100 = 5 . 20$ ist. Daher dann der Quotient sich auf

$\frac{1520000}{2937}$ d. i. auf $517\frac{1571}{2937}$ Ducaten reducirt. Daß der grose Bruch etwas über $\frac{1}{2}$ hinausreiche, sieht man vermittelst einer kurzen Nachrechnung ein; welche freilich am bequemsten mit Decimalen geführt, davon aber erst unten Belehrung gegeben werden kann.

Nach der Reesischen Art würde zu setzen seyn:

	1000	Oder	1000
1	$\frac{19}{12}$	3	19
$\frac{445}{4}$	100	(5) 445	100 (5)
$\frac{11}{4}$	1	11	4

3 . 89 . 11 : 19000 . 80

woraus ebendieselbe Schlußrechnung folgt.

Man

Man sieht übrigens bei dieser Anordnung wieder, daß so oft (auch nur kurz) Procente genannt werden, zwei Verhältnis-Glieder, wie hier $111\frac{1}{4}$ und 100, in die Rechnung bestimmt gebracht werden müssen. Man sehe deshalb auch wieder in die Erläuterung des §. 94 zurük.

Sechstes Beispiel.

Die Geltung der Carolins gegen Münze stehe zu $3\frac{1}{2}$ Procent; der Münze gegen Ducaten zu 5 Proc. die der Ducaten gegen alte Louisd'ors zu 4; wie steht demnach die Wechselgeltung oder der Cours von Carolins gegen alte Louisd'ors.

Hiebei kann man drei Proportionen aufstellen; aber man kann auch nur zwei aufstellen; je nachdem man die erste annimmt.

Die erste Gleichung, welche bei dem Problem vorausgesezt wird, ist nehmlich die

100 Thaler in Carolin bezahlt, gelten so viel, als $103\frac{1}{2}$ Thal. in Münze bezahlt.

Daher 100 Th. Car. = $103\frac{1}{2}$ Thal. Münze.

Daraus kann man eine formale, oder scheinbare Proportion machen, indem man zwei und zwei Glieder gleich sezt:

100 zu 100 = $103\frac{1}{2}$ zu $103\frac{1}{2}$.

Man benimmt sich auf diese Art, damit die Verhältnis-Glieder auf sechs, d. i. zu drei

ganzen

ganzen Proportionen vollkommen ausreichen mögen. Denn nun gehen die connectirte Verhältnisse so fort:

Thal. in Carol. — Thal. in Münze
100 zu 100 = $103\frac{1}{2}$ zu $103\frac{1}{2}$

Thal. in Münz. — Thal. in Ducaten
100 zu . = $95\frac{5}{21}$ zu .

Thal. in Duc. — Thal. in Louisd'or
100 zu . = 104 zu x.

Für die Zahlen $103\frac{1}{2}$ und $95\frac{5}{21}$ ist es räthlich, sogleich

$\frac{207}{2}$ und $\frac{2000}{21}$ zu setzen.

Damit wird

$$x = \frac{100.207.2000 \quad 104}{100.\ 2 \quad 21.100.100} = \frac{207.104}{21.10}$$

und weil $207 = 3.69$ ist, so wird daraus

$\frac{7476}{70}$ d. i. $106\frac{5}{7}$

woraus sich ergiebt, daß zu 100 Thal. in Carol. $106\frac{5}{7}$ Thal. in alten Louisd'ors nöthig seien, und daß also die leztere um $6\frac{5}{7}$ Procent niedriger im Cours (darnach) stünden, als Carolins.

Es kostet wohl nicht viele Mühe, um einzusehen, daß in der That die eigentliche Berechnung blos 2 Proportionen angeht, und daß man aus der vorangeschikten Gleichung

100 Thl. Carol. = $103\frac{1}{2}$ Thal. Münze

wohl befugt gewesen wäre, sogleich zu schreiben:

	Thal. in Münz.		Thal. in Ducat.
(I)	100 zu $103\frac{1}{2}$	=	$95\frac{5}{2\,1}$ zu .
(II)	Thal. in Duc.		Thal. in Louisd.
	100 zu .	=	104 zu x.

Weil aber die Lehrer des Reesischen Kettensatzes einmal die Zahl der Dinge, zu welcher in dem Problem hauptsächlich ein Aequivalent gesucht wird, wie hier die 100 Thaler in Carolins sind, in der Columne der rechten Seite oben sehen wollen, so muß man wohl eine scheinbare Proportion, wie die auf dem vorigen Blatt angeführte, zuerst formiren, und die Combination alsdenn fortsetzen, wie vorgelegt worden. Die Reesische Kette wird so gestellt:

		100 Thl. in Car.	
100 Thl. C.		$\frac{207}{2}$ Thl. in Münz.	(3)
100 Thl. M.		$\frac{2000}{2\,1}$ Thl. in Duc.	(3)
100		100 Thl. in Louisd.	
10.7.3	:	3.69.104	
Oder: 70	:	7476.	

Die Uebertragung des Nenners im ersten Bruch, 2, ist hier unterblieben, weil 2 sogleich als Divisor zu der unmittelbar drunter stehenden Zahl 2000 gedacht werden kann, wodurch 1000 zur rechten, mit 100.100 zur linken Hand gar leicht verglichen wird.

Ueber den Vortrag des Problems selbst kann man noch folgende Erwägung anstellen:

Er

Er ist, in Beziehung auf die Erinnerung, welche im Eingang dieses §. steht, kurz, in der kaufmännischen Sprache verfaßt, welche Handelsleute wohl verstehen, welche aber für Anfänger selten bestimmt und deutlich genug ist.

Wenn da gesagt wird: der Cours der Carol. stehe gegen Münze auf $3\frac{1}{2}$ Procent; so versteht der Kaufmann schon, daß der Sinn dahin gehe: die Zahlung mit Münze sei schlechter, von niedriger Geltung, als die mit Carolins; und zwar seien

$103\frac{1}{2}$ Thl. in Münze erst 100 Thl. in Louisd. gleich zu achten.

Weiter, wenn gesagt wird: Die Münze stehe gegen Ducaten auf 5 Procent; so faßt er den Sinn sogleich, welcher der ist:

105 Thaler in Münze, betragen so viel als 100 Thaler in Ducaten-Zahlung.

Weshalb ihm dann auch die daraus gefolgerte Verhältnis

100 Thal. in Münze erfordern nur $95\frac{5}{21}$ in Ducaten

schon geläuffig ist, welche eben die Zahlen in der IIten Proportion veranlaßt, wie sie auf der vorigen Seite stehen. Man kann die lezte Zahl mit dem Bruch aber auch umgehen, und die Glieder der IIten Proportion gerade hin so schreiben:

Thal. in Münz		Thal. in Ducaten
105 zu	=	100 zu

Der

Der Erfolg der Rechnung muß ebenderselbe seyn; nur, daß man bei der leztern Annahme etwa eher am Schluß auf den halbirten Quotienten: $\frac{3738}{35}$ gekommen wäre, bei welchem jedoch in der That die Division nicht bequemer ausfällt, als die mit $\frac{7476}{70}$.

§. 97. Nunmehr wird es wohl nicht mehr zu frühe seyn, auch Beispiele von Aufgaben aufzustellen, welche die Verbindung nicht blos von drei, sondern von vier Proportionen erfordern, um die verlangte Antworten hervorzubringen.

Gesezt, es würde vorgetragen: 3600 Amsterdamer Gulden hat einer zu zahlen, und will es, schiklicher Verhältnisse wegen, in Augsburger Current-Gulden entrichten; wie viel braucht er dazu? wenn ihm folgende Wechsel-Verhältnisse bekannt, oder als richtig angegeben sind:

5 Amsterd. Gulden sind 2 Amsterd. Thal. gleich;
100 Amsterd. Thal. sind 110 Augsb. Giro Thal. gleich;
100 Augsb. Giro sind 127 Current Thal. gleich.

Der Anfang der Proportionen muß mit der Frage anheben:

Wenn 5 Amst. Guld. so viel, als 2 Amst. Thal. betragen, wie viel betragen 3600 solche Gulden in Amst. Thalern?

Die folgende Sätze geben sich alsdenn gar leicht:

Amsterd. Guld.		Amsterd. Thal.
5 zu 3600	=	2 zu .
Amsterd. Thal.		Augsb. Giro-Thl.
100 zu .	=	110 zu .
Augsb. Gir. Th.		Augsb. Curr. Th.
100 zu .	=	127 zu .
Augsb. Curr. Th.		Augsb. Curr. G.
2 zu .	=	3 zu x.

Man betrachte sogleich, welche Grösen der ersten Glieder sich augenscheinlich zum Theil gegen Grösen der mittlern Glieder aufheben; man wird ohne vieles Nachsinnen wohl bald setzen können:

$$x = \frac{36 . 11 . 127 . 3}{5 . 10}, \text{ d. i. } \frac{75438}{25}$$

Die Division giebt $3017\frac{13}{25}$ Augsb. Curr. Gulden; Diese sind das gesuchte Aequivalent von 3600 Amsterdamer Gulden.

Man bemerkt auch wohl hiebei ohne Mühe, daß, wenn die Frage blos auf Augsburger Currentthlr. gegangen wäre, nicht auf Gulden, drei Proportionen zugereicht haben würden.

Der Reesische Ketten-Saz ist, wie man aus obigem leicht abnehmen kann, folgender:

	5	3600	(100)
(100)	100	2	(2)
(10)	100	110	(10)
(2)	100	127	
		3	

5. 10 : 30. 11. 127. 3

Uebrigens sind die meisten Rechnungen, wo Augsburger Giro-Wechsel-Geld, und Augsb. Current-Geld vorkommt, etwas beschwerlich, und lassen sich selten durch Zerfällungen auf kleine Zahlen zurükführen, weil die wesentliche immer dabei nöthige Zahl 127 eine Primzahl ist, in welche, ihrer Natur nach, kein kleinerer Divisor aufgeht. (Vergl. mit §. 38. S. 84)

§. 98. In Wechsel-Geschäften kommen besonders die Untersuchungen häufig vor, welche Wechsel-Zahlung über zwei verschiedene Plätze, von denen man nach Wahl Wechselbriefe nehmen kann, die vortheilhafteste sei? Dabei führt der Calkül öfters auf 4 Proportionen.

Beispiel. Einer hat in Amsterdam 4600 Thaler Banco zu bezahlen. Er kann die Zahlung durch Frankfurter Wechselbriefe leisten; aber auch durch Pariser. Auf welchen Weg hat er wohl am ersten Vortheil?

Um die Frage sich zu beantworten, muß er die vorhandene Wechsel-Course kennen; er

muß wissen, daß zu der Zeit, wenn er remittiren, oder Wechsel übermachen will, etwa folgende Aequivalente statt haben:

100 Thal. Amsterd. Banco sind 140 Frankfurter Wechselthalern gleich;

Ferner 46 Frankf. Wechsel-Thal. sind immer so viel, als 55 Reichsthal. nach dem 24 G. Fus (nach §. 68).

Mit diesen Kenntnissen kann er die eine Rechnung führen, nehmlich, um zu erfahren, wie viel er Reichsthaler zu Zahlung der 4600 Thaler Amsterd. Banco nöthig habe. Diese Rechnung ist kurz:

Amsterd. Thal.		Frankf. Wechs. Thl.
100 zu 4600	=	140 zu .
Frankf. W. Th.		Reichsthaler
46 zu .	=	55 zu x.

Die Antwort heißt: $\frac{4600 . 140 . 55}{100 . 46 .}$; d. i. 7700.

So viel Reichsthaler hat er auf diesem Wege nöthig.

Jezt versucht er aber auch den andern Weg; ob er nehmlich mit Pariser Briefen etwas besser beikäme. Das zu erfahren, hat er folgende Vorerkenntnisse nöthig:

1 Holland. Thl. Bco ist = 100 Deniers Vlämisch;

55 Deniers Vläm. sind 3 französ. Livres zu Paris gleich;

300 Livr. in Paris sind $76\frac{2}{3}$ Frankf. Wechs. Thal. gleich; oder 90 L. sind 23 Fr. W. Thal. gleich.

Sind diese Geltungen zur Zeit der Frage richtig *), so wird alsdenn folgende Rechnung geführt:

Amst. Thal. Bco		Deniers Bläm.
1 zu 4600	=	100 zu .
Deniers Bläm.		Livres zu Paris
55 zu .	=	3 zu .
Livres		Frankf. W. Thal.
90 zu .	=	23 zu .
Frankf. W. Thl.		Reichs-Thal.
46 zu .	=	55 zu x.

Da ist $x = \frac{460 . 100 . 3 . 23 .}{46 . 9 .}$ od. $\frac{23000}{3}$; d. i. $7666\frac{2}{3}$.

So viel Reichsthaler hätte der Kaufmann auf diesem Weg zu entrichten, um die 4600 Amsterd. Thal. Bco auszugleichen.

Der Unterschied wäre allerdings demnach sehr bedeutend; oder, in der kaufmännischen Sprache sich auszudrücken:

die Frankfurt. Wechselbriefe rendirten weit schlechter, als die Pariser, wie die Vergleichung der Zahlen 7700 und $7666\frac{2}{3}$ jedem klar darlegt. **)

*) Der Französ. Wechsel-Cours steht freilich seit 1789 nicht mehr so hoch. Allein die Belehrung leidet durch die Fiction selbst nichts.

**) Wie viel Procente der Pariser Cours in diesem Fall besser rendirte, als der Frankfurter, findet

Der Reesische Kettensaz ist blos aus unsern Proportionen herausgeschrieben; wer die vorhergehende zehn Blätter mit Aufmerksamkeit durchgegangen hat, wird gewiß an keinen Schwierigkeiten weiter anstehen, wie die zwei Columnen zu bilden, oder wo sie her zu nehmen seien.

§. 99. Noch ein Beispiel, nicht von kaufmännischen Cambial-Geschäften hergenommen, sei folgendes:

Einer besizt eine Heerde von 8800 Schaafen; läßt sie scheeren, und erhält von jedem Schaaf 7 Pfund Wolle; er verkauft diese Wolle Stein-weise; den Stein zu 20 Gulden, (nach dem 24 Guld. F.) wird aber in Laubthalern ausgezahlt, das Stük zu 2 Gulden 45 Kreuz. gerechnet. Ehe er diese ausgiebt, schlägt ihre Währung ab, auf 2 Guld. 42 Kr. Nun wird gefragt: Wie viel hat er Laubthaler, in der findet man so: Man zieht die kleinere von der grössern erhaltenen Summe ab; Hier also: $(7700 - 7666\frac{2}{3})$ läßt $33\frac{1}{3}$ zum Unterschied. Hierauf spricht man: Bei 7700 hat die Differenz $33\frac{1}{3}$ statt; wie viel bei 100? Ein Regel de Tri-Saz giebt also die gesuchte Grösse der sogenannten Procenten-Differenz:

$$7700 \text{ zu } 100 = 33\tfrac{1}{3} \text{ zu } \tfrac{100}{7700}.$$

Dieser Bruch beträgt etwas über $\frac{2}{5}$. Daher dann das Urtheil dahin ausfällt: Der Pariser Cours rendirt um $\frac{2}{5}$ Procent besser.

der höhern Geltung erhalten? und wie viel hat er durch den unvermutheten Abschlag des Gelds Schaden gelitten?

Ein kurzes Nachdenken führt wohl jeden darauf, daß sich zwei Haupt-Probleme aus den vorgelegten Datis setzen lassen.

Das Iste hört mit der Frage auf: Wie viel hat der Wollenverkäufer Laubthaler zu 2 Guld. 45 Kr. wirklich erhalten?

Das IIte: Wie viel hat er durch den Geld-Abschlag verloren?

Das Iste Problem aufzulösen, sind vier Proportionen erforderlich. Die erste derselben muß mit der Frage beginnen:

Ein Schaaf gab 7 Pfund Wolle aus; wie viel geben 880 Schaafe?

Die folgenden Verhältnisse schliessen sich hierauf leicht an.

Zahl der Schaafe		Wolle in Pfunden
1 zu 880	=	7 zu .
Wolle in Pf.		Stein
22 zu .	=	1 zu .
Stein		Guld. Reichsg.
1 zu .	=	20 zu .
Gulden		Laubthaler
$2\frac{3}{4}$ zu .	=	1 zu X.

Gewiß ist $X = \frac{880.7.20.4}{22 \quad 11}$, d. i. $\frac{22400}{11}$

welches Quotient $2036\frac{4}{11}$ Laubthaler beträgt. So viel erhielt der Wollenverkäufer in die Hände.

Nun schreite man zur Auflösung der IIten Aufgabe.

Die Laubthaler litten einen Abschlag; der Verkäufer konnte die, welche er in den Händen hatte, blos zu 2 Guld. 42 Kr. ausbringen; d. i. zu $2\frac{7}{10}$ Gulden.

Wie viel Gulden machten darnach die $2036\frac{4}{11}$ Laubthal. aus?

Die Antwort hierauf erhält man durch eine einzige Proportion, welche die ist:

Laubth. Stücke. Ihre Geltung

$$1 \text{ zu } 2036\tfrac{4}{11} = 2\tfrac{7}{10} \text{ zu } (\tfrac{22400}{11} \cdot \tfrac{27}{10}).$$

Das lezte Glied beträgt: $\frac{60480}{11}$, d. i. $5498\frac{2}{11}$ Gulden (nach dem 24 G. F.)

So viel beträgt der wahre Erlös für die Wolle, welchen der Verkäufer wirklich bezieht. Damit vergleiche man den Betrag der Laubthaler, ehe sie in der Währung fielen. Man sehe nur deshalb in die 4 connexe Proportionen zurük; das 4te Glied schon der IIIten Proportion muß diesen Betrag angeben. Da steht aber blos ein Punkt; Weil nehmlich zuerst nicht unmittelbar nach der Zahl der Gulden gefragt worden; so konnte aus oben angeführten Gründen (nach §. 77) gar wohl nur ein Punkt, als Marke, eingezeichnet werden. Jezt aber

tritt

tritt das Bedürfnis ein, zu wissen, welche Zahl dieser Zeichen vorstellen solle. Man muß daher den Calkül vornehmen, gleich als ob blos stünde:

1 zu 880 = 7 zu .
22 zu . = 1 zu .
1 zu . = 20 zu y.

Die Rechnung ist leicht vollführt: y ist = 5600.

So viel Gulden hatte der Wollenverkäufer vor dem widrigen Abschlag in Händen. Mit dieser Zahl vergleiche man hiernächst die kurz vorher angezeigte; und ziehe die Differenz von beeden:

$(5600 - 5498\frac{2}{11})$ ist $= 101\frac{9}{11}$.

Der Wollenverkäufer hat also offenbar einen Schaden von $101\frac{9}{11}$ durch die veränderte Geldwährung erlitten.

Durch diese Differenz-Zahl ist demnach auch das IIte Problem aufgelöst, und also alles beantwortet, was im Eingang dieses §. fragweise vorgetragen worden. *)

*) Wenn der Fragende etwa verlangt hätte, den Schaden in der kaufmännischen Sprache nach Procenten anzugeben, so würde er nun leicht befriedigt werden können. Man sezte nehmlich: 5600 zu 100 = $101\frac{9}{11}$ zu $\frac{20}{11}$; womit sich ergiebt, daß der Geldabschlag einen Verlust von $1\frac{9}{11}$ Procent veranlaßt hätte. Man sehe die vorige Bemerk. zu §. 98.

Angehende Rechner können nicht genug erinnert werden, daß sie jede Aufgabe, welche ihnen aufzulösen beschwerlich scheint, und der sie gleichsam nicht recht beizukommen wissen, in zwei oder drei einzelne Probleme zu zerlegen sich angelegen seyn lassen. Sie werden dadurch freilich manchmal auf kleine Umschweife gerathen; aber es wäre unrecht, dieselbe — Irrwege zu nennen. Vielmehr werden sie dadurch, (wenn sie anderst im Calkül und in Auffetzung der Verhältnisse sich nicht verfehlt haben) gar bald auf den rechten Weg geleitet werden, und die Art, wie die Rechnung abgekürzt und bündig durchzuführen sei, mit Gewißheit einsehen lernen. Die Kunst, mit Zahlen zu calculiren, ist weit nicht so gros, als die Kunst, bei vorkommenden speciellen Aufgaben schnell durchzusehen, was sich connectiren, was sich in Verhältnisse stellen, was sich neben einander hinordnen, und was sich dagegen trennen läßt, und getrennt, oder abgesondert betrachtet, und berechnet werden muß. Wiederholte Erwägungen der Vorträge, welche die zwei Abschnitte (X und XI) enthalten, werden eine Geläufigkeit der hieher gehörigen Beurtheilungen, wie ich hoffe, hervorbringen, welche jeden Rechner nach und nach in den Stand setzen kann, bei Problemen, welche bestimmt in keinem Rechenbuch vorkommen, und nirgends nachgeschlagen werden können, sich durch analogische Schlüsse zu helfen.

XII. Abschnitt.

Von stetigen arithmetischen Proportionen und Progressionen.

§. 100.

Der Unterschied zwischen arithmetischen und geometrischen Proporrionen ist bereits oben in §. 49 wohl deutlich genug auseinander gesezt worden.

Es werde jezt noch einmal eine arithmetische Proportion von vier Gliedern einzeln betrachtet.

19 zu 12, wie 1794 zu 1787

ist eine solche. Die Differenz zwischen dem ersten und zweiten Glied ist die Zahlgröse 7.

Eben diese Differenz hat zwischen dem 3ten und 4ten Glied statt.

Man denke sich für diese arithm. Proportion eine andre von folgender Bildung:

19 zu 12, wie 12 zu 5
(7) (7)

Offenbar ist der Unterschied in beeden Fällen 7. An dem Daseyn einer arithm. Proportion ist demnach auch hiebei nicht zu zweifeln. Weil aber die zwei mittlern Glieder einerlei Zahl haben (12, jedes) so erhält diese

Pro-

Proportion den Nahmen einer stetigen, (proportionis continuæ).

Man denke sich, um näher mit diesen Proportionen bekannt zu werden, folgende Sätze:

1 zu 4, wie 4 zu 7
1 zu 3, wie 3 zu 5
1 zu 2, wie 2 zu 3

und man erkennt damit wohl bald, daß jede arithmetische Proportion, deren erstes Glied 1 heißt,

„zum Anzeiger des Verhältnisses die Zahl
„habe, die um 1 kleiner ist, als die,
„welche im 2ten Glied steht."

So ist 3, d. i. 4 — 1 die Differenz in der ersten von diesen Proportionen; so ist 2 die in der zweiten Proportion; 1 die in der dritten;

§. 101. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern Glieder der Summe der mittlern gleich. Diese Behauptung ist allgemein wahr, es mag von stetigen, oder von nicht-stetigen Proportionen die Rede seyn. Den

Beweis

faßt wohl jeder leicht so: Er denke sich nur zwei der erst gesezten Proportionen, als

1 zu 4, wie 4 zu 7

so geschrieben:

1 zu (3 + 1), wie 4 zu (4 + 3).

Der

Der Gehalt der Glieder ist gleich. Nun addire er

die Summe der äuss. Gl. 1 + 4 + 3
die Summe der mittl. Gl. 3 + 1 + 4

Offenbar sind da ganz eben dieselbe Zahlen vorhanden; die Grösse der addirten einzelnen Zahlen, zusammen genommen, muß also auch gleich seyn:

$$1 + 4 + 3 = 3 + 1 + 4.$$

Die Gleichheit im Betrag der Summe wird kein Vernünftiger in Abrede stellen können; er müßte dann bezweifeln, ob 1 + 4 so gros, als 4 + 1 wäre? Die Ordnung durch + verbundener Zahlen ändert den Gehalt ihrer Summe niemals.

Eben so stelle man sich vor,

1 zu 3, wie 3 zu 5
sei 1 zu (2 + 1), wie 3 zu (2 + 3)

geschrieben. Auch hier ist wieder

$$2 + 1 + 3 = 1 + 2 + 3.$$

Der Beweis kommt also blos vermittelst der Darstellungsweise an den Tag; da man nehmlich das 2te Glied durch das erste, plus der Differenz; und das 4te durch das 3te, plus der Differenz, ausdrükt.

So kann man die 3 Proportionen unter der allgemeinen Formel denken:

1 zu (1 + d) wie 4 zu (4 + d)
1 zu (1 + d) wie 3 zu (3 + d)
1 zu (1 + d) wie 2 zu (1 + d).

In der ersten Proportion bedeutet d = 3; in der zweiten ist d = 2; in der 3ten d = 1.

Und $1 + d + 4 = 1 + 4 + d$

sind gewiß gleiche Grösen; Eben so auch

$1 + d + 3 = 1 + 3 + d$

und so in jedem andern Fall.

Im Allgemeinsten begreift aber nachfolgende Formel über die 4 Glieder jede arithmetische Proportion unter sich

a zu a + d, wie b zu b + d

wo in die Augen fällt, daß

die Summe der äuss. Gl. a + b + d
der Summe der mittl. Gl. a + d + b

gleich sei.

Nur muß man hiebei merken, daß, wenn arithmetische Proportionen in Concreto (mit bestimmten Zahlen) vorgelegt werden, in denen das erste Glied gröser als das 2te, und das 3te Glied gröser als das 4te gesezt ist, alsdenn anstatt + d allemal — d geschrieben werden müsse. Z. B.

19 zu 12 wie 1794 zu 1787
ist 19 zu (19 — 7) wie 1794 zu (1794 — 7)

Darunter setze man allgemein:

a zu (a — d), wie b zu (b — d)

Die

Die Zahl 19 ist hier = a; genommen 7 = d; 1794 = b; und die Summe der äussern Glieder a + b — d ist der Summe der mittl. Gl. a — d + b ganz gewiß gleich.

Der geübte Mathematiker bedient sich hiebei des Ausdruks:

a + d ist allemal das zweite Glied, es mag d bejaht oder verneint genommen werden, wenn a das erste Glied heißt.

Eben so b + d ist das 4te, wenn b das 3te ist, allgemein; es mag d bejaht oder verneint, (dem bejahten ganz entgegen gesezt) gedacht werden.

§. 102. In jeder stetig angenommenen Proportion läßt sich die Abkürzung treffen, daß man nur drei Zahlen schreibe, z. B. so

2; 7; 12 od. 1; 4; 7.

Dabei nennt man 7, das mittlere Glied auch

die arithmetische Mittel-Proportionale; (mediam proportionalem)

Wie findet man dieselbe (mag hier sogleich gefragt werden), wenn blos die zwei äussern Glieder bekannt wären?

Das Problem ist leicht durch die Antwort aufgelöst: „Addire die 2 äussern Glieder, und „halbire ihre Summe; so hast du die verlangte „Mittel-Proportionale!

Z. B. (2 + 12) ist 14; halbirt, oder $\frac{1}{2}$. 14 ist 7; das ist eben das gesuchte mittlere Glied.

Ferner 1 + 7 ist 8; alsdenn halbirt, oder $\frac{1}{2}$. 8 ist 4.

Diese Regel trift allemal zu; worauf gründet sie sich aber? Wie läßt es sich evident beweisen, daß

die halbe Summe der äussrrn Glieder die arithm. Mittel-Proportionale seyn müsse?

Am bündigsten läßt sich der Beweis führen, wenn man die im vor. §. gelehrte allgemeine Formel zur Hand nimmt,

a zu a + d wie b zu b + d

und bedenkt, daß, so bald

das Daseyn einer stetigen Proportion

behauptet wird, das 3te Glied (b) dem zweiten ganz gleich seyn; folglich auch allgemein gesezt werden müsse: b sei = a + d; und daher anstatt

a zu a + d, wie b zu b + d

habe a zu a + d, wie a + d zu (a + d) + d

jezt statt.

Nun addire man die äussern Glieder:

a + a + d + d

und addire die innern

a + d + a + d

Der Betrag muß gleich ſeyn, weil die Ordnung in der Stellung auch da die Summen-Gröſe ſelbſt nicht ändern kann. (Man ſehe in §. 101 in den Beweis zurük). Die äuſſern Glieder betragen demnach offenbar:

$$a+d+a+d; \text{ oder } 2.(a+d).$$

Denn $a+d$ zweimal nacheinander geſezt, iſt eben ſo viel, als zweimal $a+d$, oder $= 2.(a+d)$. Dieſe Umbildung in zwei Factoren, 2 und $(a+d)$, hat nun zuverläſſig allemal ſtatt. So oft nur eine ſtetige Proportion geſezt wird, kann man daher behaupten:

die Summe der äuſſ. Gl. iſt $= 2(a+d)$
und die Summe der inn. iſt ebenfalls $2(a+d)$.

Iſt dem aber alſo, ſo denke man einmal abgeſondert,

die Summe der äuſſ. Gl. allein, als $2(a+d)$ und dieſen Betrag halbire man ſogleich, oder dividire ihn durch 2; ſo erhält man

$$\frac{2(a+d)}{2} \text{ d. i. } (a+d)$$

und damit erſcheint eben die arithmetiſche Mittel-Proportionale ſelbſt.

Natürlich kann auch gar nichts anders herauskommen, weil die Helfte von $(a+d)+(a+d)$, wenn man die Gröſen in zwei Klammern theilt, offenbar $a+d$ ausmacht.

Anmerkung.

Der Gebrauch von Mittel-Proportionalen erſtrekt ſich ſehr weit; und man kommt im gemei-

gemeinen Leben unzählige mal darauf. Der Ertrag eines Guts z. B. fällt in einem Jahr auf 107 Thaler aus, im andern auf 123 Thlr. Man addirt beede Grösen, halbirt die Summe, und urtheilt:

„der Gewinn von dem Gut ist auf ein „Jahr ins andre auf 115 Thaler zu setzen.

Das Urtheil kann wohl trügen; aber in unzählig-vielen Fällen benimmt man sich einmal nach dieser Rechnung.

Der Oekonom, der Most, oder Kernfrüchte einkauffen will, fragt nach dem höchsten und niedrigsten Verkauf, und ist zufrieden, wenn der Kaufschilling, welchen er zahlen soll, das arithmetische Mittel von beeden Kaufschlägen beträgt.

§. 103. Das dritte Glied jeder stetigen arithmetischen Proportion wird gefunden, wenn man das 2te doppelt nimmt, und das erste Glied von diesem Duplum abzieht. Nehmlich, allgemein ist zu denken:

„daß $2(a+d)$, das zweite Glied, dop„pelt genommen, bedeutet."

Man kann dafür auch $a+d+a+d$ schreiben. Hievon ziehe man a, das erste Glied, ab; so bleibt $a+d+d$; oder $a+2d$. Und so läßt sich das dritte Glied in jeder stetigen Proportion vorstellen.

Man

Man erwäge, daß in der Reihe der natürlichen Zahlen, wo man nur 3 Zahlen herausnehmen mag, die unmittelbar nach einander folgen, allemal die 3te unter die allgemeine Formel passe: (a + 2 d)

3. B. wenn man denkt

1; 2; 3.

so ist da 1 = a; und die Differenz; d, ebenfalls = 1; daher

(a + 2 d) hier (1 + 2 . 1) *) das ist (1+2) = 3; wie seyn soll.

Eben so in 94; 95; 96 ist

96 = (94 + 2 . 1) d. i. (94 + 2) od. 96. = (a + 2 d).

Jede mittlere Zahl von solchen drei aus der Reihe der natürlichen Zahlen, paßt unter die Formel,

(a + d) schlechthin

So ist (94 + 1) = 95

die arithmet. Mittelproportionale zwischen 94 und 96.

Die Folgerung hieraus ist unbestreitbar:

*) Man muß 2 d, als 2 Factoren denken, gleich als ob stünde (2. d). Der Punkt zwischen zwei Buchstaben = Factoren, wird gar oft von den Mathematikern weggelassen. In allgemeinen Zeichen kann er auch ohne Irrung wegbleiben. Aber bei Zahlen = Factoren muß man ihn durchaus setzen.

„Jede ganze Zahl läßt sich (in der bemelten „Hinsicht) als eine arithmetische Mittelpropor„tionale von den 2 ihr nächsten Zahlen anse„hen, die ihr zu beeden Seiten (zur rechten und „linken zunächst oben ihr und unter ihr) liegen."

§. 104. Man denke sich nicht blos drei Glieder einer stetigen steigenden arithmetischen Proportion, sondern vier oder mehrere, wie z. B. folgende:

2 zu 5 = 8 zu 11 = 14 zu 17

oder: 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Die Glieder steigen in dem ersten Saz immer um 3, in dem zweiten um 2.

Eine solche Fortschreitung heißt eine arithmetische Progression oder Reihe.

Das dritte Glied in jeder solcher Progression ist (wie wir schon wissen) allgemein (a + 2 d) zu denken.

Welche Formel kommt aber wohl dem 4ten Glied zu?

Man sieht ohne Mühe ein: (a + 3 d), weil ja das nächste Glied nach dem 3ten um die Differenz d grösser seyn muß; und a + 2 d + d in Kürze (a + 3 d) zu schreiben ist.

Aus gleichem Grund gehört

dem 5ten Glied die Formel zu: a + 4 d
dem 6ten Glied . . . . a + 5 d
dem 7ten Glied . . . . a + 6 d

und am allgemeinsten:

dem nten Glied . . . a + (n — 1) d

Diese

Diese lezte Formel ist sehr wichtig; sie gründet sich auf die Bemerkung, daß

der Factor zu d, welcher bei jedem Glied vorkommt, eine Zahl ist, welche um 1 weniger beträgt, als die (determinirte) Zahl des Glieds in der Reihe, d. h. als die Zahl, welche andeutet, von dem wie vielten Gliede aus der Reihe die Rede sei.

Der bemeldte Factor zu d heißt (n — 1), wenn vom nten Glied die Rede ist; er heißt (m — 1), wenn vom mten Glied die Rede ist. So heißt er (6 — 1); daß ist 5, wenn vom 6ten Glied die Rede ist.

§. 105. Um Anfänger sogleich von dem Nutzen, welchen diese Vorstellungsweise gewährt, zu überzeugen, so mögen sie sich den Fall denken, da einer die Frage ihnen vorlegte:

„Ich habe hier eine arithmetische Reihe „verdekt; deren erstes Glied heißt 1; die „Differenz, in der die Grösen steigen, ist $1\frac{1}{3}$; „wie heißt das 9te Glied dieser Reihe?

Der Anfänger kann freilich daraufhin denken: Dieser Angabe selbst nach, muß, wenn

das 1ste Glied 1 heißt,
das 2te . . . $1 + 1\frac{1}{3}$ oder $2\frac{1}{3}$ heissen,
das 3te . . . $2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3}$ oder $3\frac{2}{3}$

und ohne Zweifel wird er so nach und nach darauf kommen, wie das 9te, nach welchem

gefragt wird, heissen muß. Allein dieses Geschäft ist langweilig; es erfordert, daß jedes einzelne zwischen dem 1sten und 9ten liegende Glied ausgerechnet hingestellt werde. Diese Mittel-Rechnungen lassen sich völlig umgehen, wenn man die angezeigte allgemeine Formel zu benützen versteht. Die gesuchte Gröse im 9ten Glied heisse allgemein vorgestellt u; ganz gewiß bedeutet oder ist

$$u = a + (n - 1).d$$

dem vorigen Blatt gemäs. Das erste Glied a ist in Concreto = 1; So wird in der Aufgabe selbst bestimmt angegeben. Die Differenzgröse d ist = $1\frac{1}{3}$ oder $\frac{4}{3}$. Das nte Glied ist in Concreto das 9te; Folglich ist n — 1 so viel, als 9 — 1, das ist = 8 für unsern Fall. Also

$a + (n - 1).d$ ist uns: $(1 + (9 - 1).\frac{4}{3}$

das ist: $(1 + 8.\frac{4}{3})$ oder $(1 + 10\frac{2}{3})$ oder $11\frac{2}{3}$ ist hier = u.

Demnach heißt die Antwort auf die vorgelegte Frage: das 9te Glied ist $11\frac{2}{3}$.

Wenn eben die Bedingungen blieben, aber nach der Gröse des 10ten Glieds gefragt würde, so wäre nur kurz unter

$$a + (n - 1).d = u$$

zu stellen $1 + (10 - 1).\frac{4}{3} = 1 + \frac{9.4}{3}$

das ist: (1 + 12); oder 13 ohne Bruch heißt das 10te Glied einer solchen Reihe; und demnach wäre jezt u = 13.

Die

Die allgemeine Formel enthält also in der äussersten Kürze eine Vorschrift, wie sich aus den

gegebenen drei Grösen a, d, und n;

jedes Glied einer arithmetischen Progression, (ohne die Mittel-Glieder berechnen zu müssen) finden lasse. Die unbekannte Gröse im genannte Glied nennt man nicht unschiklich u, weil man sich dieselbe als die lezte Gröse der Reihe, (ultimum) denken kann, wenn auch diese weiter fortlauffen sollte.

Die erwähnte Vorschrift läßt sich übrigens wohl auch mit Worten ausdrücken; aber sie wird in der That etwas weitläufig:

Nimm das erste Glied; addire dazu ein Product aus 2 Factoren, deren
erster die um 1 verringerte Anzahl der Glieder enthält,
der zweite aber die gegebene Differenz ist, um die die Glieder steigen.

Diese Summe giebt die Gröse des verlangten Gliedes allemal an.

Die Formel sagt dem Mathematiker mit 4 deutlichen kurzen Zeichen eben das, was hier in sechs Zeilen vorgeschrieben wird; und mag angehenden Rechnern immer einen Vorschmak von den ausserordentlichen Vortheilen der algebraischen Sprache, welche sie doch wohl hie und da schon als ausserordentlich dürften rühmen gehört haben, abgeben.

§. 106. Diese allgemeine Formel kann aber noch weiter benüzt werden, um auch folgende Probleme aufzulösen:

„Wenn das erste und lezte Glied einer „arithm. Reihe genannt wird, und die Anzahl „der vorhandenen Glieder, wie heißt die Diffe„renz?"

Und wenn das erste und lezte Glied mit der Differenz gegeben sind, wie gros kann die Anzahl der Glieder seyn?

Bei dem ersten dieser 2 Probleme ist also
a, u, und n gegeben,
und d wird gesucht, oder wird als unbekannt betrachtet.

Bei dem zweiten wird
a, u, und d gegeben,
und n wird gesucht.

Wenn man die Behandlung der allgemeinen Formel versteht, so ist eine jede dieser Fragen so leicht, als die andre; und, was manchen Arithmetikern, die gar nichts von Buchstaben-Rechnung wissen wollen, räthselhaft scheinet, ist dem Geübten ein mechanisches Spiel.

Wenn nach der Differenz gefragt wird, so ist durch Umwendung der Formel $u = a + (n-1).d$ die jezt unbekannte Gröse d auf eine Seite zu bringen, und

$$\frac{u-a}{n-1} = d$$

heißt

heißt in einem Ausdruk, der nicht geschmeidiger seyn kann, die Auflösung des Problems.]

Mit Worten sagt die Formel so viel:

„Ziehe das erste Glied von dem lezten „ab; in den Rest dividire mit der um „1 verringerten Anzahl der Glieder."

Der Quotient giebt an, was d in Concreto sei.

Wenn aber nach der Anzahl der Glieder gefragt würde, so muß n auf eine Seite allein zu stehen kommen; und zwar so:

$$\frac{u - a}{d} + 1 \text{ ist} = n.$$

Mit Worten heißt die Regel:

Ziehe das erste Glied vom lezten ab; dividire den Rest durch die gegebene Differenz der Reihe; und addire zu dem Quotienten allemal + 1.

Die Summe (des Quotienten und 1) giebt die Anzahl der Glieder an, welche die arithm. Reihe haben wird, von der die Rede jedesmal in Concreto ist.

§. 107. Wenn der Anfänger hiebei fragen möchte, wie geht es dann zu, daß man die Formeln umwendet, und einmal d, alsdenn n auf eine Seite bringt, so mag demselben hier, wo nicht die ganze Lehre der Buchstaben-Rechnung und der einfachen Gleichun-

gen vorgetragen werden kann, folgendes zur Antwort dienen:

Wenn er den Sinn der ersten Formel (aus S. 311)

$$u = a + (n - 1).d$$

gefaßt hat; so denke er blos an das zurük, was oben in §. 17 auseinander gesezt worden, und er wird die Behauptung sehr natürlich finden, daß, wenn man zu beeden Seiten hier a abziehe,

$$\text{aus } u - a = a + (n - 1)\,d - a$$

hervorgehen müsse,

$$u - a = + (n - 1)\,d$$

weil zur rechten Seite $a - a$ gar nicht weiter, (als o gleich) geschrieben zu werden braucht.

Ist man so weit, so muß man nunmehr ferner, blos vollends wissen, 1) daß eine Gleichung bestehen bleibe, (oder ihr Aequal-Zeichen = behalte), wenn mit einer und ebenderselben Gröse zu beeden Seiten *) dividirt werde; und daß daher, wenn z. B.

$$45 = (5.9); \text{ und } 78 = (5.13)$$

statt habe, auch allemal gelte $\frac{45}{5} = \frac{5.9}{5}$; und $\frac{78}{6} = \frac{6.13}{6}$;

2tens muß man sich aus S. 77 und S. 80 erinnern, daß ganz eben so viel, als

$\frac{5.9}{5}$

*) Siehe in §. 57 u. §. 58 zurük; insbesondre in S. 141 und 147.

$\frac{5.9}{5}$ und $\frac{6.13}{6}$ die ganze Zahlen 9 und 13 für sich schon betragen.

Aus gleichen Gründen wird daher auch, wenn man (n — 1) als eine Grösse denkt, und dieselbe zum Divisor in die Gleichung u — a = (n — 1).d zur rechten und linken Seite annimmt, daraus folgern, daß

$$\frac{u - a}{n - 1} = d \text{ allein}$$

sei. Damit ersieht man nun wohl hinlänglich, wie man d auf eine Seite der Gleichung bringe, und damit durch u, a, n vollkommen ausgedrükt darstellen könne. Sind also nur u, a, und n gegebene Zahlen, so findet man, vermöge dieser Zusammensetzung, wie gros d in Concreto seyn müsse.

Ganz auf gleichförmige Weise findet man n, wenn n eine noch unbekannte Anzahl der Glieder einer Reihe bedeutet.

Der Anfang des Geschäfts ist wieder, wenn man nehmlich

$$u = a + (n - 1)d$$

umwenden will, daß man

$$u - a = (n - 1)d$$

setze; alsdenn mit d beederseits dividire, und hierauf + 1 zur rechten und zur linken Hand addire, um damit n — 1 + 1, d. i. n allein zu erhalten.

§. 108. Eben so wichtig, als die vorhergehende Probleme, ist vollends das folgende:

„Von einer vorgegebenen arithm. Reihe „die ganze Summe aller ihrer Glieder „anzugeben, ohne die mittlern Glieder (zu „successiven Additionen) nöthig zu haben.

Wenn man nur das erste und lezte Glied einzeln kennt, und die Anzahl der Glieder dazu, so kann man allemal aus diesen 3 Datis schon behaupten:

Die Summe der Reihe sei einem Product gleich, deren einer Factor die Summe des ersten und lezten Gliedes $(a+u)$ und der andre die halbirte Anzahl der Glieder oder $\frac{n}{2}$, sei.

Kurz: S sei $= \frac{n.(a+u)}{2}$

wenn S die Summe der Reihe allgemein bedeute, und a, u, n, gegebene Grösen seien.

Beweis.

Man denke eine arithmetische Reihe, welche man nur will, z. B.

2, 7, 12, 17, 22, 27

so ist allemal die Summe der 2 äussern Glieder so gros, als die Summe der zwei nächsten dran, welche gleichweit von dem Mittelpunkt der Reihe entfernt stehen, als $2+27$ ist $=$ $7+22$;

$7+22$; und auch $= 12+17$; Allemal beträgt die Summe 29.

Die Ursache dieser Erscheinung läßt sich gar leicht einsehen, wenn man eine arithmetische Reihe in der allgemeinen Form

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \text{u. s. w.}$$

betrachtet. Da ist natürlich allemal $(a+a+3d)$ eben so viel $(a+d+a+2d)$; allemal hier nehmlich: $2a+3d$. Und weil jedes nächstfolgende Glied nur um d wächst, so muß dieses Gesez natürlich statt haben, der Glieder mögen so viel, als man nur will, seyn; so daß z. B. in

$$a,\ a+d,\ \ldots\ a+99d,\ a+100d,$$

gewiß $[a+(a+100d)]$ so viel als

$$= [(a+d)+(a+99.d)]$$

betragen wird, nehmlich kurz: $(2a+100d)$.

Die ganze Summe der Reihe wird also aus einer Summe von zusammengepaarten Grösen bestehen, welche allemal $(a+u)$ ausmachen, oder aus Paaren von je zwei und zwei immer ungleichen Grösen, die doch zusammen immer $a+u$ betragen.

„Aus wie viel solchen Paaren? mag jemand fragen. Man denke nur ein wenig nach, ob sich diese Frage nicht unmittelbar beantworten lasse, wenn man die

Anzahl der Glieder, (wie viel deren die ganze Reihe von a bis u hat,) kennt, d. i. wenn n eine gegebene Zahl wäre.

Die

Die Zahl der gedachten Paare kann nicht n seyn, sondern nur halb so viel, also $\frac{n}{2}$ oder $\frac{1}{2}n$.

Denn zwei der gezählten Glieder machen ja allemal erst ein Paar; also

4 Glieder machen 2 Paar
6 Glieder machen 3 Paar

n Glieder machen $\frac{n}{2}$ Paar.

Ohne Mühe ergiebt sich nun daraus, daß die Summe der arithm. Progression jedesmal betragen müsse;

ein Paar, $\frac{1}{2}$ n mal genommen.

d. i. $(a+u).\frac{1}{2}.n$ oder $\frac{n}{2}.(a+u)$

welches eben die Formel ist, deren Richtigkeit und gleicher Werth mit S oben behauptet worden.

Man kann die Ueberzeugung auch daher nehmen:

$(a+u).n$ ist gewiß doppelt so viel, als S beträgt.

Denn $(a+u)$ so vielmal geschriebeu, als n angezeigt, gäbe ja zwei Reihen, jede von gleichem Gehalt. Also

$(a+u).n$ wäre gewiß $= 2.S$.

Nun dividire man beederseits mit 2, so kommt natürlich

$$\frac{(a+u).n}{2} = S$$

zum

zum Vorschein, welches eben wieder unsere behauptete Formel ist. *)

Hieraus erhellet nun, daß sich die Summe einer arithmetischen Reihe angeben lasse, auch wenn man die Differenz, um die die Glieder steigen, nicht kennte. Denn d kommt in der Formel, welche das Aequivalent von S ist, gar nicht vor.

Kennte man etwa die Grösse dieser Differenz, aber n nicht, (die Anzahl der Glieder, deren Summe man verlangt,) so läßt sich diese Summe dennoch eben so leicht bestimmt angeben, weil n durch u, a, und d nach §. 106 ausgedrükt werden kann; und man daher nur das dort stehende Aequivalent von n da einsezen darf, wo in der Formel selbst n hingehörte. Damit wird

$$S = \left(\frac{u-a}{d}+1\right).\left(\frac{a+u}{2}\right)$$

und der Betrag wird in Concreto immer auf gleiche Art ausfallen.

§. 109. Beispiele, aus welchen erhellet, daß die theoretischen Lehren von arithmetischen Pro-

*) Wenn in Concreto die Anzahl der Glieder eine ungerade Zahl ist, so wird das Duplum des mittelsten Glieds so gros, als die Summe der 2 äussersten seyn, auch als die Summe von 2 andern gleich weit von dem mittlern abstehenden.

Progression von gutem Gebrauch seyn, finden sich in unzählichen Büchern. Hier mögen nur einige angeführt stehen:

Ein Bote wird auf 200 Meilen abgeschikt, und ihm Zusage gegeben, für die erste Meile 20 Kreuzer zu bezahlen, für die zweite 23; für die dritte 26, u. s. f. Was wird er also für 200 Meilen *) erhalten?

Da wird die Summe, S, gesucht, und ein Betrag an Geld ist eben darunter gemeint. Das erste Glied der Reihe ist 20; also a = 20. Aber, wie heißt das lezte Glied? es ist in dem Problem nicht angegeben. Die Zahl der Meilen, 200, bestimmt nur die Zahl der Glieder; folglich ist n gegeben = 200.

Doch auch die Differenz erhellet aus den drei ersten Zahlungen; d ist = 3. Aber u ist erst zu suchen, ehe man an S geht, oder die Summe ausrechnen kann.

$$u \text{ ist} = a + (n - 1).d.$$

In Concreto also = 20 + (199.3) d. i. 617.

Nun

*) Dieser angenommene Fall kommt wohl nicht sehr natürlich heraus. Indessen kann man sich, anstatt des Botens, jeden Menschen denken, welchem ein gewisses Geschäft aufgetragen worden, womit gewisse Schwürigkeiten verbunden sind, welche zunehmen, so wie das Geschäft fortgesezt wird. Beim Graben in die Tiefe, trägt sich dieß gar oft zu. —

Nun erst kann man S darstellen:

$(20+617).\frac{200}{2}$ d. i. 63700 Kreuzer

oder 1061 Gulden, 40 Kreuzer. So viel hätte der Abgeschikte zu beziehen, wenn er die 200 Meilen zurüklegt.

Beispiel. Wie viel sinds Glockenschläge von 1 bis 12, wenn alle zusammen angegeben werden sollen? Da ist $n = 12$; und auch u ist $= 12$; weil die Uhr zwölfmal schlägt, und das leztemal selbst 12; Mit Eins fängt die Zählung an; also 1 ist $= a$; und

$$S = (1+12).\frac{12}{2}, \text{ d. i. } (13.6) = 78.$$

In manchen Fällen ist aber auch S eine gegebene Zahl, und das erste Glied wird gesucht. Da ist a auf eine Seite der Gleichung zu schaffen. Aus der allgemeinen Formel

$S = (a+u).\frac{1}{2}n$ folgt

$$a+u = \frac{2S}{n}$$

und wenn man u beederseits abzieht, a allein

$$= \left(\frac{2S}{n} - u\right).$$

Man denke folgender Frage nach.

Einer gewinnt mit einer gewissen Summe Gelds in jedem Jahr so viel, als er angelegt hat. Die Summe wird nicht benannt. Nach 9 Jahren hat er mit dem angelegten Geld 2000 Gulden beisammen. Wie viel hat er angelegt?

Ehe man an die Rechnung selbst geht, muß man aus dem, was in dem Problem wörtlich steht, einige Schlüsse ziehen, und sie deutlich gleichsam vor sich hinstellen.

Die 2000 Gulden bestehen aus einer arithmetischen Reihe von 9 Gliedern; in 9 Jahren vermehrte sich die Anlage ja bis zu der Summe. Der Zuwachs war gleich; Um den Betrag der Anlage nahm der Wachsthum zu; also überall um ein d. Aber am Ende eines jeden Jahrs war mehr Geld (eine andre Zahl-Gröse) vorhanden; Allgemein also war dann in 3 Jahren

$$a,\ a+d,\ a+2d.$$

Allein weil d so viel, als die Anlage selbst betragen hat, wie aus der Angabe im Problem selbst nothwendig folgt, so muß diese Reihe folgender

$$\left.\begin{array}{l} a,\ a+a,\ a+2a,\ \ldots \\ \text{oder } a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots \end{array}\right\} \text{gleichgeltend seyn.}$$

Gewiß gehörte nun dem lezten Jahr 9.a zu. Aus der Aufgabe läßt sich das zuverlässig schliessen. Man hat also alle Data, um S auszudrücken, und erkennt ohne weitre Schwürigkeit, daß nach diesen Voraussetzungen

$$S = (a+9.a).\frac{9}{2}$$

zu denken sei. Man schreibe 2000 ein, wo S steht, und die Gröse in der Klammer bilde man in a.(1+9) um; so wird man zur Rechnung selbst erhalten:

$$2000 = a.(1+9)\,\frac{9}{2}.$$

Dafür

Dafür kann man sogleich

$$2000 = a.5.9$$

setzen, weil $(1+9).\frac{1}{2}$ gewiß $(10.\frac{1}{2})$ oder 5 ist. Jezt stelle man sich 5.9 als einen Divisor zu beeden Seiten vor, so erhält man

$$\frac{2000}{5.9} = a;$$ d. i. $44\frac{4}{9}$ Gulden.

So gros war die Anlage im ersten Jahr. Mit der Einsicht dieser Bestimmung ist das Räthsel gelöst.

Dieses Beispiel ist darum lehrreich, weil dem ersten Anschein nach zwei unbekannte Grösen in dem Problem verstekt zu werden scheinen, a und u; da aber u ein Multiplum von a ist, (als $= 9.a$) und die Zahl des Vielfachen 9, doch genannt worden, aus $a+u$ daher $(a+9.a)$ wird; so ist in der That nur eine unbekannte Gröse zu suchen; nehmlich die im ersten Glied der arithmetischen Reihe, welche bisher uns a geheissen hat.

Die Wichtigkeit der Umbildung, da man sich anstatt $a+9.a$ in 2 Factoren $a.(1+9)$ zu denken hat, erhellet hier, wie in unzähligen andern Fällen schon der gemeinen Rechenkunst; und Anfänger können nicht aufmerksam genug auf diese leichte Operation gemacht werden. (S. oben in §. 26.)

§. 110. Man verweile noch etwas bei der erwähnten Umbildung. Es geht in jedem Fall ohne Ausnahme an, anstatt

$(a+u)$ sich zu denken $(a+m.a)$,

indem m.a allemal u vorstellen kann, wenn man nur annimmt, daß in Concreto m auch einen Bruch bedeuten dürfe. (Man vergl. §. 55 im VIIten Abschn.)

Daraus folgt dann, daß sich

$$S = a.(1+m)\frac{1}{2}n$$

als die allgemeine Formel für die Summe aller arithmetischen Reihen eben so gut, als die in §. 108 zuerst angeführte betrachten lasse.

Wendet man die Formel um, um a auf eine Seite zu erhalten, so ergiebt sich damit

$$\frac{2S}{n.(1+m)} = a$$

und diese Formel dient, jede Aufgabe, welche nur auf den Schlag geformt seyn mag, wie die leztere, in welcher aber keine so bequeme runde Zahl, wie dort 9 war, vorkäme, ohne Umschweife sogleich aufzulösen.

In dem lezten Beispiel war n so gros, als m in Concreto; also m = n. Dieses muß aber gar nicht bei jeder Aufgabe, welche diese Formel angeht, also seyn. Gesezt einer fragte:

Wenn 77 in eilf Zahlen zerlegt würde, welche in einer arithm. Reihe fortliefen, und unter denen die lezte 6 mal so gros, als die erste der Reihe wäre, wie mögen diese zwei äussersten Zahlen, wie auch die Differenz der Reihe wohl heissen?

Da ist a+u = a+6.a; also m hier = 6. Aber die Anzahl der Glieder n ist bestimmt = 11 angegeben. Und S = 77. Demnach ist a zu suchen, und ergiebt sich, wenn man einschreibt in

$$\frac{2.S}{n.(1+m)} \text{ hier } \frac{2.77}{11.(1+6)} = a.$$

Dieser ist (2.77):(11.7) oder kurz = 2. Und hiernach ist a = 2 folglich das erste Glied der Reihe eben damit entdekt. Das lezte Glied der Reihe, u, muß sechsmal so gros seyn; und also, 6 mal 2, das ist 12 betragen.

Somit kennt man das erste und lezte Glied, nebst der Anzahl der Glieder dieser Reihe (11). Daraus läßt sich die Differenz d bestimmen. Nach §. 107 tst

$$d = (u - a):(n - 1)$$

Also in Concreto: (12 — 2): 10, d. i. = 1.

Die nächsten Schlüsse aus diesen Entdekungen folgen nun sehr leicht, und gehen dahin, daß, wenn das erste Glied 2 heißt, das zweite (2+1), oder 3 heissen müsse; das dritte, 4; u. s. f.

Jeder kann sich von der Richtigkeit dieser Auflösung dann endlich vollends auch (a posteriori) durch den klaren Augenschein überzeugen; Er stelle nur die Reihe der natürlichen Zahlen hin

$$2+3+4+\ldots+10+11+12$$

und addire sie. Ihre Summe macht gerade 77 aus.

Auf diese Weise läßt sich jede denkbare Zahl in unendlich-viele kleinere zerlegen, welche in einer arithmetischen Progression fortlauffen, und die ganze vorgegebene Gröse in der Summe der Reihe selbst ausmachen.

Denkt man diese Summe, $S = 1$; so werden die Glieder der Reihe durchgehends ächte Brüche seyn; und so läßt sich 1 in unzählige Brüche zerlegen.

Z. B. es würde gefragt: „wie heissen die Brüche, deren 10 seyn sollen, der lezte 4mal so gros, als der 1ste; welche zusammen addirt $= 1$ ausmachen?" Man suche zuvörderst das erste Glied. Vermöge der Formel:

$$(2\,S) : [n \,.(1+m)] = a$$

muß es seyn: $(2.1) : [10.(1+4)] = \frac{2}{10.5}$

oder a ist $= \frac{1}{25}$. Das lezte Glied aber u muß $(4.\frac{1}{25})$ heissen.

Die Differenz der Reihe ergiebt sich durch die Formel:

$$(u - a) : (n - 1) = d$$

$$(\tfrac{4}{25} - \tfrac{1}{25}) : (10 - 1) = \tfrac{3}{25}.\tfrac{1}{9} \text{ oder } \tfrac{1}{75}.$$

Die Reihe wird also so anfangen, und schliessen:

$$\tfrac{1}{25} + (\tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{75}) + \;.\;.\;.\;.\;.\; \tfrac{4}{25}$$

oder, um ihre Fortschreitung deutlich zu übersehen, mit Reduction unter einen Nenner:

$$\tfrac{3}{75} + \tfrac{4}{75} + \tfrac{5}{75} \;.\;.\;.\;. + \tfrac{11}{75} + \tfrac{12}{75}.$$

Diese

Diese Anwendung der Formeln für arithmetische Reihen zu Zerlegung der Zahlen ist wichtig und wohl zu behalten. In wenigen Rechenbüchern wird nur darauf gedeutet, und die Benützung der Darstellung (durch die bemeldte Umbildung der Formel) wird schwerlich in einem gezeigt.

XIII. Abschnitt.

Von stetigen oder zusammenhängenden geometrischen Proportionen und Progressionen.

§. 111.

Bereits vom VIIten Abschnitt an, haben wir uns schon mit geometrischen Proportionen beschäftigt. Laßt uns jezt unsre Aufmerksamkeit auf die allein richten, deren mittlere zwei Glieder gleiche Zahlen sind. Z. B.

$$2 : 10 = 10 : 50$$
$$2 : 11 = 11 : 60\tfrac{1}{2}.$$

Solche Proportionen heissen stetige (continuæ).

Jeder kann sich dergleichen Proportionen selbst bilden, so viel er nur mag. Die Gesezlichkeiten bleiben eben dieselbe, welche bei denen mit 4 verschiedenen Gliedern im VIIten Ab-

schnitt schon auseinander gesezt worden sind: Der Exponent zwischen den zwei ersten Gliedern muß eben dieselbe Zahl seyn, welche zwischen dem 3ten und 4ten Glied (in gleicher Function) statt hat.

Das Product der äussern Glieder ist auch immer dem der mittlern gleich.

Das 4te Glied ist allemal so gros, als das Product der mittlern, durch das erste Glied dividirt.

Die Kenntnis dieser Sätze, und die Ueberzeugung davon wird aus den obigen Abschnitten (VII und VIII) hier ganz vorausgesezt.

Das Product der mittlern Glieder bei stetigen Proportionen wende jezt unsre Aufmerksamkeit allein auf sich. Es ist allemal

„ein Multiplum zweier gleichen Zahlen,
„oder der Betrag zweier durch sich selbst
„multiplicirten Zahlen.

Ein solches Product heißt ein Quadrat, auch eine Zahl der zweiten Dignität; die zweite Potenz einer Gröse.

Bei jeder stetigen Proportion ist daher das Product der äussern Glieder einem gewissen Quadrate gleich. Allgemein $a.c = bb$, oder b^2; wenn man sich eine stetige Proportion allgemein so vorstellt:

$$a : b = b : c.$$

Man denke sich das zweite Glied, b, hier wieder nach §. 55, als a mit e, dem Exponen-

ponenten des Verhältnisses, multiplicirt, d. i. b = a.e; so wird daraus folgen, daß sich die Proportion auch so schreiben lasse:

a : a.e = a.e : c.

Aber da c allerdings als b.e sich gedenken läßt, (indem ja der Exponent zwischen dem 3ten und 4ten Glied e heißt, wie zwischen dem 1sten und 2ten; und das 3te Glied eben so gut b, als ae sich schreiben läßt), so muß nicht nur

c = b.e

sondern auch c = a.e.e

eine richtige Gleichung seyn.

Ist dem aber also, so wird sich mit allem Recht

für a : b = b : c

auch a : a.e = a.e : a.e.e

setzen lassen.

Wozu diese Umbildung? Um (gleichsam von einer neuen Seite her) einzusehen, daß ac=bb sei, weil das Product der äussern Glieder, jezt uns

als (a. a.e.e) vorgestellt,

gewiß dem Product der mittlern

(a.e.a.e)

ganz gleich ist. Man darf ja nur die Factoren anders stellen; so ist allemal vorhanden: aa ee oder $a^2 e^2$, oder $(ae)^2$.

Also ist hier wieder die volle Bestätigung des Theorems §. 54 gegeben.

§. 112. Die allgemeine Vorstellung eines Quadrats ist bb, oder b^2; oder mm, auch m^2. In wirklichen Zahlen schreibt man auch 5^2; 6^2; u. s. w. und nennt die kleine Zahl zwei, welche zur Rechten der grösten Zahlen oder Buchstaben oben hin angehängt worden,

den Exponenten; auch Anzeiger der Dignität; indicem potentiæ.

Wo ein Quadrat ist, da kann man sich allemal die unquadrirte Zahl denken, und diese heißt, in Beziehung auf das Quadrat, die Wurzel, die Quadrat-Wurzel.

Man sezt, wo man ihr Daseyn anzeigen will, das Zeichen: $\surd$; auch $\sqrt[2]{}$. So ist $\surd 16 = 4$; und auch $\surd (4^2)$ ist eben so viel.

Allgemein $\surd bb$ ist b; oder $\surd b^2 = b$.

Man denke sich die Zahlen 2, 3, 4, quadrirt; man erhält 4, 9, 16, . . .

Auf diese Art kann man fortfahren, und sich die Quadrate von allen Zahlen von 1 bis 100, oder bis 1000 berechnen, und aufschreiben. Diese Mühe aber haben sich schon viele Arithmetiker vor uns gegeben, und ihre ausgerechnete Quadrate in Tabellen gesammelt. Jeder Rechner thut wohl, wenn er sich dergleichen anschafft.

Sieht man in eine solche Tafel, so fällt jedem in die Augen, daß es gar viele Zahlen giebt, welche keine Quadrat-Zahlen, das ist keine der Zahlen:

1, 4, 9, 16, 25. . .

seien. Denn 2, 3, 5, 6, 7, 8; sind offenbar keine Quadrat-Zahlen, wenn man nur die Reihe von 1 bis 9 einzeln betrachtet. Eben so sind zwischen 9 und 16 die Zahlen 10, 11 bis 15 keine Quadrat-Zahlen.

Gesezt, es käme aber doch nun irgendwo vor:

$\sqrt{7}$; oder $\sqrt{12}$

was hat man dabei zu denken?

Die Quadratwurzel aus 7 müßte eine Zahl seyn, welche mit sich selbst multiplicirt, 7, im Product ausmachte. Eine solche Quadratwurzel giebt es nun nicht. Eben so wenig giebt es eine Zahl, die mit sich selbst multiplicirt, 12, ausgäbe. Man muß daher seine Zuflucht zu Näherungen nehmen. Nehmlich, wenn die Zahl 7, als Quadrat-Zahl gedacht wird, so muß man denken: das Quadrat von 2 giebt erst 4; das Quadrat von 3 aber 9. Also muß 2 mit einem angehängten Bruch z. B. $2\frac{1}{2}$ oder $2\frac{5}{8}$, quadrirt genommen, gegen 7 hinreichen. Man versuche dieß:

$(2\frac{1}{2}).(2\frac{1}{2})$ ist $= \frac{5}{2}.\frac{5}{2}$ ist $\frac{25}{4}$

oder $6\frac{1}{4}$. Aber

$(2\frac{5}{8}).(2\frac{5}{8})$ oder $\frac{21.21}{8.8}$ ist $\frac{441}{64}$.

Dieser

Dieser Bruch beträgt $6\frac{5}{6}\frac{7}{4}$. Augenscheinlich liegt derselbe der Zahl 7 um vieles näher, als der Bruch $6\frac{1}{4}$, (für den man $6\frac{1}{6}\frac{6}{4}$ auch schreiben kann). Man nehme aber jezt auch einmal $2\frac{3}{4}$ im Quadrat; oder

$\frac{11}{4} \cdot \frac{11}{4}$ d. i. $\frac{121}{16}$ ist $= 7\frac{9}{16}$.

So fällt nun damit in die Augen, daß die Quadrat-Wurzel von 7 zwischen $2\frac{5}{8}$ und $2\frac{3}{4}$ hineinfalle; und man ist damit auf dem Weg, die Näherung so weit zu treiben, als man nur will, das ist, Zahlen aufzustellen, welche mit sich selbst multiplicirt, ein Product auswerfen, welches an 7 äusserst nahe hinreiche. Ganz wird man aber doch niemals ein solches Multiplum 7 erreichen; mit andern Worten, es giebt keine reine vollkommne Quadratwurzel von 7; sondern jede, die man angeben mag, ist eine unreine, unvollkommene Wurzel. Eben so verhält es sich mit $\surd$ 12. Die Quadratwurzel dazu ist gröser als $3\frac{2}{5}$; und kleiner als $3\frac{1}{2}$.

Man hat diese Grösen in Näherung zu kennen, sehr nöthig, um in unzähligen Fällen nur eine, doch einigermasen befriedigende Antwort auf die Frage:

„wie gros ist die geometrische Mittelpro-
„portionale zwischen zwei vorgelegten Zah-
„len?

ertheilen zu können. Dieses wird sogleich aus den Vorträgen des nächsten §. erhellen, aus welchen

welchen man überhaupt noch näher einsehen lernen wird, wie die Lehre von Quadratwurzeln mit geometrischen Proportionen zusammen hänge.

§. 113. Anstatt die vier Glieder einer stetigen geom. alle zu schreiben; schreibt man oft nur drei, nehmlich a; b; c; und spricht dabei: b ist die geometrische Mittel-Proportionale. Wir wissen schon, daß $b = \sqrt{bb}$ sei. Wir wissen aber auch, daß $bb = a.c$ sei. Es wird sich also auch natürlich unter oder hinter das $\sqrt{}$ sowohl bb, als ac hinsetzen lassen; oder

$\sqrt{(bb)}$ wird $= \sqrt{(a.c)}$ seyn.

Also auch b wird $= \sqrt{(a.c)}$ wieder als Aequivalent (eben so gut, als $\sqrt{bb}$) gültig seyn.

Laßt uns nun Fälle in Concreto vor die Hand nehmen. Anstatt

2 zu 10, wie 10 zu 50

zu schreiben, kann man 2; 10; 50 setzen, muß aber doch, wenn die Zahlen ausser allem Zusammenhang vorkommen, beifügen, wie es damit gemeint sei, daß man eine geometrische Proportion dabei im Sinn habe.

Nun die Producte $2.50 = 10.10$
sind gewiß gleich. Folglich auch

$\sqrt{(2.50)} = \sqrt{(10.10)}$
oder $\sqrt{(2.50)}$ ist $= 10.$

Die

Die Zahl 10 ist eben von den 3 Zahlen 2; 10; 50 die geometrische Mittel-Proportionale

media proportionis geometrica.

Man nehme ein anders Beispiel:

$$3 : 21 = 21 : 147$$

ist eine stetige geom. Proportion. Also muß die Gleichung gültig seyn:

$(3.147) = (21.21)$ oder $(21)^2$; und daraus folgt:

$\sqrt{(3.147)} = \sqrt{(21)^2}$ oder 21 allein.

Die Zahl 21 ist die geom. Mittel-Proportionale zwischen 3 und 147.

Die geometr. Mittelproportionale zwischen jeden zwei Zahlen, wird daher kurz so gefunden:

„Wenn man die zwei Zahlen als Factoren ansieht, mit einander multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel ziehet.

Warum ist diese Qu. Wurzel die verlangte Mittel-Proportionale? ... könnte ein Anfänger, der die nächst-vorhergehende Blätter nicht mit Aufmerksamkeit gelesen, wohl hier nochmals fragen. Darum, weil sich in einer stetigen Proportion jedes der zwei mittlern Glieder, als eine Quadrat-Wurzel ansehen läßt, und deren Product dem Product der äussern Glieder allemal doch gleich ist. Denn in

$$a : b = b : c$$

kann man doch allerdings b als $\sqrt{bb}$ ansehen; und b.b als $(\sqrt{bb}).(\sqrt{bb})$; und dieses Product ist = ac. Aus den Aequivalenten bb und ac; folgt aber $b = \sqrt{ac}$ unwidersprechlich.

Die bisherige Beispiele $\sqrt{(2.50)}$ und $\sqrt{(3.147)}$ waren geflissentlich so gewählt, daß jeder Rechner nur die 2 Factoren wirklich in einander multipliciren durfte, um die Thunlichkeit der Wurzel-Ausziehung vor sich zu sehen. Denn 2 mal 50 ist 100; und die Quadr. Wurzel von 100 oder $\sqrt{100}$ ist = 10. Eben so (3.147) ist 441, und die Qu. Wurzel aus 441 oder $\sqrt{441}$ ist rein 21; wie aus jeder Quadrat-Tabellen ersichtlich ist; auch durch leichte Nachrechnung erprobt werden kann. Allein, wie? wenn die geometr. Mittel-Proportionale zwischen zwei Zahlen zu wissen verlangt wird, welche, als Factoren, durch einander multiplicirt, ein Product ausgeben, das sich nicht in den Quadrat-Tabellen befindet? wie kann man darauf antworten?

Wenn, zum Beispiel, gefragt würde: wie heißt die geometr. Mittelproportionale zwischen 3 und 21? wie mag man dieses angeben?

Sie muß sie wohl $= \sqrt{(3.21)}$ seyn. Denn allgemein kann man doch denken: Der Saz ist so zu nehmen:"

$$3 : b = b : 21$$

und

und da muß b.b = (3.21) seyn; also auch $\surd$(bb) oder b muß = $\surd$(3.21) = $\surd$63 seyn. Die Quadrat-Wurzel aus 63 ist also b, oder ist die numerische Grösse, nach welcher man fragt, ohne allen Zweifel. Allein, man schlage jezt sogleich die Quadrat-Tafeln auf, und sehe sich nach 63 oder vielmehr nach $\surd$63 um:

49 ist das Quadrat von 7
64 ist das Quadrat von 8.

Aber 63 kommt nicht in diesen Tafeln vor. Was ist also bei $\surd$63 anzunehmen? Die Quadrat-Wurzel von 63 muß grösser, als 7, und kleiner als 8 seyn. Sie muß näher an 8, als an 7 liegen; dieß sieht hier jeder ein, der nur etwas darüber nachdenken mag, wie nahe 64 an 63 liegt. Sie muß wohl zwischen $7\frac{3}{4}$ und 8 liegen, kann er ebenfalls zimlich bald finden. Er nehme nur das Quadrat von $7\frac{3}{4}$; oder rechne:

$\frac{31}{4} \cdot \frac{31}{4} = \frac{961}{16}$ ist $60\frac{1}{16}$.

Er darf mehr wagen; und setzen. Sie muß zwischen $7\frac{9}{10}$ und 8 liegen:

$\frac{79}{10} \cdot \frac{79}{10}$ ist $= \frac{6241}{100}$ oder $62\frac{41}{100}$.

Damit ist dann doch eine Näherungs-Zahl vorhanden, welche den Fragenden in vielen Fällen schon ziemlich beruhigen dürfte. Ganz befriedigen kann sie ihn aber freilich nicht. Ihn mehr zu befriedigen, d. h. noch viel weiter gehende Näherungs-Zahlen ihm vorzulegen,

die

die Kunst, durch die sich dieses bewerkstelligen läßt, kann erst, wenn man Kenntnisse von Decimalen besizt, vollkommen gefaßt werden. Hier sollten nur die wesentlichste Begriffe darüber beigebracht werden, wie man auf Näherungen ausgehen müsse, wenn irgendwo eine Gröse als ein Quadrat aufgestellt wird, die doch keine reine Quadrat-Wurzel hat, und nach dieser Wurzel Frage ergangen wäre.

§. 114. Man nehme jezt nochmals die stetige Proportion, wie sie auf dem vorigen Blatt hingestellt worden, vor sich:

$$3 : b = b : 21.$$

Man wird darunter schreiben können

$$3 : (\sqrt{63}) = (\sqrt{63}) : 21.$$

Denn bb ist gewiß 3.21 oder 63 selbst; also ist auch b nothwendig $= \sqrt{63}$; und man kann behaupten:

Die drei Grösen lauffen in einer stetigen Proportion fort:

$$3; (\sqrt{63}); 21.$$

Die Quadratwurzel von 63 mag eine Zahl seyn, was für eine es will, die Behauptung ist, (so vorgestellt) doch allerdings wahr; und $(\sqrt{63})$ heißt die geometrische Mittel-Proportionale zwischen 3 und 21 unleugbar.

Der allgemeine Nahmen aber aller Grösen, von der Art, wie $(\sqrt{63})$, wie $(\sqrt{7})$ sind, heißt:

Irrational = Zahlen, incommensurable Grösen, auch surdische Zahlen (numeri surdi).

Sie lassen sich weder durch ganze Zahlen, noch durch Brüche ganz durchmessen (vollkommen ausmessen); daher der Ausdruk, sie seien incommensurabel, ihrer Eigenschafft sehr angemessen ist.

Ihr Quadrat aber ist allemal meßbar, oder commensurabel; oder auch nach einem andern Kunst-Ausdruk: rational.

$(\sqrt{7}).(\sqrt{7})$ ist $= 7$ eine ganze Zahl; von sieben Einheiten auszumessen, und zu bestimmten Verhältnissen geschikt; (ad rationes puras apta).

$(\sqrt{\frac{12}{5}}).(\sqrt{\frac{12}{5}})$ ist $= \frac{12}{5}$

wo das Quadrat ein uneigentlicher Bruch, aber doch eine reine rationale Gröse ist. Dann $\frac{12}{5}$ ist unleugbar in Verhältnissen (Rationen) aller Art wohl brauchbar.

Uebrigens mag hiebei sogleich noch folgendes bemerkt werden, 1) daß ein Wurzelzeichen, welches vor einem Bruch steht, den Zähler und Nenner zugleich angehe, (sie beede afficire) und also

$\sqrt{(\frac{12}{5})}$ so viel als $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$ sei;

dagegen aber $\frac{\sqrt{12}}{5}$, oder $\frac{1}{5}$tel der Quadr. Wurzel aus 12 eine ganz andre Gröse bedeute, als die Quadrat-Wurzel aus $(\frac{12}{5})$. 2tens, daß ein Wurzel-

zel-Zeichen vor einer Grösse, welche aus Factoren besteht, anzusehen ist, als afficire es jeden der Factoren einzeln z. B. $\surd 12$ ist so viel, als $\surd(3.4)$ das ist $= (\surd 3.\surd 4)$; und da die Quadr. W. aus 4 rein 2 ist, so erhellet, daß sich $\surd 12$ zum Theil rational ausdrücken lasse, nehmlich, als $= (2.\surd 3)$.

Da der Fall unzähligemal sich einstellet daß zwei Factoren als äußre Glieder, zu einer geometr. Proportion gehörig, angesehen werden, (wie besonders in Mechanik häufig vorkommt,) und ihr Product nur selten gerade das Aequivalent einer reinen Quadrat-Zahl ist, so ist die Kenntnis von Irrational-Grösen, und ihrer Behandlung durchaus nicht zu entrathen; und gehört gar nicht blos unter die unfruchtbare Speculations-Uebungen spizfindiger Abstractionen.

§. 115. Eine Folgerung aus dem Beigebrachten ist weiter der Saz:

„Jede Quadratwurzel ist die geometrische „Mittel-Proportionale zwischen 1 und dem „Quadrat der Wurzel-Grösе." Denn man denke nur eine geom. Proportion, deren erstes Glied 1 heisse, das 2te unbekannt b sei, so müssen doch gewiß die Verhältnisse eintretten:

$$1 \text{ zu } b = b : \text{zu } \frac{bb}{1}$$

Aber bb, dividirt durch 1, ist eben $=$ bb. Nun führt die Regel:

Multipl. das erste und lezte Glied, und ziehe die Quadratw. aus, so hast du die geom. Mittel-Proportionale

nothwendig auf $\sqrt{(1.bb)}$ d. i. auf b. Folglich ist der Saz allgemein dargethan, indem ja b die Quadratwurzel (in Hinsicht auf bb) ist.

So oft man also die 3 Grösen

$$1;\quad b;\quad bb$$

vor sich sieht, so kann und muß man an eine stetige geometrische Proportion denken.

Desgleichen aber auch, wenn man

$$1;\quad (\sqrt{b});\quad b$$

vor die Hand bekommt. Denn da ist b als eine Quadrat-Gröse anzusehen, und $\sqrt{(1.b)}$ ist eben $= \sqrt{b}$; die geom. Mittel-Proportionale zwischen 1 und b

Beispiele sind:

$$1;\quad (\sqrt{4});\quad 4$$
$$\text{oder } 1;\quad 2;\quad 4$$
$$\text{Ferner: } 1;\quad (\sqrt{13});\quad 13$$

In dem ersten Fall liesse sich freilich die Quadrat-Wurzel wirklich ausziehen; allein im zweiten nicht. Dieser Unterschied geht aber die allgemeine Gesezlichkeit, oder die Hauptvorstellung des Fortgangs (der Fortschreitung) nichts an.

Wer sich mit der bis hieher geführten Auseinandersetzung wohl bekannt gemacht hat, wird unvermerkt zu dem, was man eine

geometrische Progression

nennt, hingeleitet. In der That existirt bereits eine in der Fortschreitung der drei Glieder

1; b; bb.

Denn das erste Glied durch b multiplicirt, giebt das zweite Glied 1.b, oder b (allein)

Das zweite Glied, wieder durch b multiplicirt, giebt das dritte, bb.

Das dritte Glied aber, durch eben dasselbe b multiplicirt, giebt das 4te: bbb oder b^3 Der Exponent, der jedes folgende Glied erzeugt, ist b; und dessen identisches Daseyn immer zwischen zwei nächsten Gliedern gehört eben zum Wesen einer geometrischen Progression.

§. 116. Die Erzeugung des 4ten Gliedes kann man sich aber auch so denken:

Wenn man sich vorstellt, es seien drei Glieder einer geometrischen viergliedrigten, nicht stetigen, Proportion gegeben, welche so gestellt wären:

1 : b = bb : .

und das 4te Glied, wo der Punkt steht, (auch x stehen könnte,) würde gesucht; so ergiebt sich der Betrag des 4ten Gliedes unleugbar durch

Multiplication der 2 mittlern; und die Division durch das erste, welches hier 1 ist, ändert nichts weiter an dem Product: (b.bb); Also heißt das 4te Glied ganz gewiß bbb; oder b^3.

Man nennt diese Gröse den Cubus von b, oder b in der 3ten Potenz.

Jedes 4te Glied einer geometr. Proportion, enthält einen solchen Cubus, wenn das 3te Glied das Quadrat des 2ten enthält; und diese Behauptung ist gegründet, auch wenn das erste Glied nicht eben mit 1 anfienge, sondern mit einer andern willkührlichen Zahl; doch kommt alsdenn diese Zahl, als Divisor oder als Factor, zu dem Cubus noch hinzu, und macht mit ihm ein Product. Diese Zahl sei allgemein durch a angedeutet. Laßt uns sehen, wie der Erfolg seyn wird, wenn der Exponent des Verhältnisses e, gedacht wird.

Zuerst werde eine stetige Proportion betrachtet. Allgemein ist jede solche Proportion vorzustellen, als

$$a;\quad ae;\quad e^2.a.$$

Daraus bilde man eine viergliedrigte, wie auf der vorhergehenden Seite, (keine stetige):

$$a : ae = (e.^2 a) : x.$$

Was kann x seyn? Nothwendig ist (ae.eea) das Product der mittlern Glieder; und dieses, durch a dividirt, giebt eee.a.

Hier ist also wieder ein Cubus, welcher aber jezt freilich einen Factor a bei sich hat.

Sein

Sein Daseyn für sich ist nicht zu leugnen. Jeder darf nur dieses 4te Glied aufmerksam ansehen, und die Factoren von e zählen, so sieht er die Richtigkeit der Behauptung ohne Irrung ein. Dieses 4te Glied ist zugleich das vierte Glied einer geometrischen Progression, deren erstes a heißt. Man sehe sie an;

$$a;\ ae;\ e^2a;\ e^3.a.$$

Man stelle sich aber jezt ferner zur Vergleichung die zuerst angeführte Reihe, welche mit 1 beginnt, nochmals vor:

$$1;\ b;\ bb;\ b^3$$

und man wird bald erkennen, daß die obre mit a; ae; anfangende viel umfassender, allgemeiner, sei; daß jede nur denkbare geometr. Reihe von Zahlen in Concreto unter sie passe, und daß die untre Reihe dagegen nur solche Zahlen-Fortschreitungen angehe, welche bestimmt mit 1 anfangen. Diesen Unterschied merke man sich wohl. Man wird bei einigem Nachdenken einsehen, daß die allgemeinere Reihe mit (a.e) zur besondern wird, wenn man denkt: In Concreto (oder in einem speciellen Fall) bedeute a = 1. Denn damit erhält man:

$$1;\ e;\ e^2;\ e^3 \ldots\ldots$$

welche mit der ganz übereinkommt, in welcher b, und die Potenzen davon vorkommen. Man denke hiebei nur immer daran, daß a und b nur all-

gemeine Zeichen seien, unter denen man jede Zahl sich denken kann; so wird man die Substitution von ae für b gar bald für zulässig erkennen, und den vorgelegten Schluß begreifen, dessen Wendung sich Anfänger in mehrern Rüksichten geläuffig machen müssen.

§. 117. Das fünfte Glied einer geometr. Proportion ist allgemein betrachtet = $e^4.a$

das 6te ist $e^5.a$

das 7te ist $e^6.a$;

wenn nehmlich das erste a, das 2te ea geheissen hat. Dieß ist sehr leicht einzusehen; da die einfache Multiplication mit dem Exponenten die Gröse eines jeden nächstfolgenden Gliedes bestimmt.

Will man das 5te Glied jeder geometr. Progression auch als 4tes einer geometrischen Proportion sehen, so muß man diese, so gebildet annehmen:

$$a : ae = e^3a : e^4a.$$

Die zwei mittlern Glieder verhalten sich zu einander, wie Cubic-Wurzel und Cubus, wo die erste, e, der Verhältnis-Exponent ist.

Das sechste Glied jeder geometr. Reihe wird als viertes einer geometr. Proportion erscheinen, wenn man sezt:

$$a : ae = e^4.a : e^5.a.$$

Die

Die zwei mittlere Glieder verhalten sich gegen einander wie die Gröse des Exponenten zu seinem Biquadrat. Denn die 4te Potenz einer Gröse wird ihr Biquadrat genannt.

Kurze Erwägungen dieser gleichförmig fortgehenden Gesezlichkeit führen jeden Nachdenkenden bald zu der Einsicht, wie sich jede Frage folgender Art beantworten lasse:

Das erste und zweite Glied einer geom. Progression sind gegeben, z. B. 2 und 6, wie heißt das 9te Glied derselben?

Man muß da zuerst so denken: die Verhältnis 2 : 6 hat zum Exponenten 3. Also ist da

$a = 2$, $e = 3$.

und die Reihe fängt an:

2; (3.2); . . . . . .

Das Glied, nach welchem gefragt wird, muß aber aus zwei Factoren bestehen,

1) aus a, hier 2;
2) aus (e^8); hier (3^8); oder 6561.

Folglich muß es (2.6561) oder (13122) heissen.

Nehmlich nach dem 9ten Glied wird gefragt; in diesem Glied mus e in der (9 — 1)ten, das ist in der 8ten Potenz vorkommen. Denn man sehe nur zurük:

im 7ten Glied kam vor e in der 6ten Potenz.
im 6ten . . . . e in der 5ten Potenz.
im 5ten . . . . e in der 4ten Potenz.

Also ist allemal die Potenz zu nehmen, welche um 1 niedriger steht, als die Anzahl des Glieds, von welchem die Rede ist.

Allgemein e in der (n — 1)ten Potenz gehört zum nten Glied, wo n eine gegebene (in Concreto benannte) Zahl bedeutet.

Im gemeinen Leben kommen Beispiele von der Art äusserst selten (oder gar nicht) vor, wo nach entfernt liegenden Gliedern geometrischer Reihen gefragt würde; aber in Geometrie und Mechanik hat die Kenntnis dieser Theorien ihre gute Anwendung; und selbst schon die gewiß praktische Lehre von Logarithmen läßt sich einem, der die Gesezlichkeit geometrischer Reihen nicht einsehen gelernt hat, gar nicht, weder deutlich noch gründlich vortragen.

Folgendes Beispiel mag in Kürze hier noch angehängt stehen:

Einer verspricht für eine gewisse Arbeit folgende Zahlung:

Für die erste Stunde 1 Pfenning, für die 2te zwei, für die 3te vier; u. s. f. wie viel wird er ihm für die 8te zahlen müssen?

Da ist $a = 1$; e ist $= 2$. Die Progression fängt offenbar mit 1 . 2 . 4 . an. Im achten Glied muß $e^7 . a$, das ist hier $2^7 . 1$ oder 128 stehen.

§. 118. Unter mehrern Bemerkungen, welche sich noch über die Natur geometrischer Reihen

Reihen machen lassen, hebe ich vorzüglich folgende aus:

1) Das Product der beiden äussersten Glieder in jeder geometr. Progression, ist allemal dem Product zweier andrer Glieder gleich, welche von dem äussersten gleich weit abstehen; auch dem Quadrat des mittelsten, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist:

z. B. in 2; 6, 18; 54; 162
ist (2 . 162) = (6 . 54) = (18 . 18).
Jedesmal beträgt das Product 324.

2) Das erste Glied verhält sich zu dem zweiten in jeder geom. Progression
wie die Differenz zwischen der Summe der ganzen Reihe und dem lezten Glied
zu der Differenz zwischen eben der Summe, und dem ersten Glied.

Oder kurz: wie S — u zu S — a.

In der lezten Reihe in Concreto ist S = 242; wie jeder durch Addition finden kann; und unleugbar hat (in Beziehung auf unsre Behauptung) statt:

2 : 6 = (242 — 162) : (242 — 2)
oder 1 : 3 = 80 : 240.

Man kann sich durch unzählige Erfahrungen überzeugen, daß die gedachte zwei Differenzen sich allemal ebenso verhalten, nehmlich wie a : zu ae. Jeder mache selbst Versuche

auf die mannichfaltigste Art; er wird die angezeigte Gesezlichkeit immer ganz ohne Ausnahme bewährt finden.

Man nehme daher dieselbe *), als richtig, an; so folgt eben aus der Proportion

$$a : ae = S - u : S - a$$

zunächst, daß $[a.(S-a)] = [ae.(S-u)]$ gleiche Producte seien; und aus dieser Gleichung läßt sich nun mit leichter Mühe S allein, durch a, e und u ausgedrükt, darstellen. Nehmlich, wenn man in die leztere Gleichung beederseits mit a dividirt, so bleibt noch

$$S - a = e\,(S-u) \text{ od. } e.S - eu.$$

Daraus aber läßt sich weiter folgern:

$$S - a - eS = -eu.$$

Und daraus ferner:

$$S - eS = a - eu.$$

Und daher auch umgewendet:

$$eS - S \text{ oder } ((e-1).S) = eu - a$$

woraus dann zum Schluß, wenn man mit $e-1$ dividirt, sich ergiebt: $S = \frac{eu-a.}{e-1}$

Hieraus läßt sich nun folgende Regel mit Worten bilden:

Wer

*) Wem es zu viel verlangt scheint, den angeführten Saz als ausgemacht richtig anzunehmen, der sehe nur in das nächstfolgende Blatt; er wird in demselben seine Begier nach mathematischer Evidenz befriedigt finden.

Wer die Summe aller Glieder einer geom. Reihe mit einemmal kennen will, der multiplicire blos das lezte Glied mit dem Exponenten der Reihe, ziehe das 1ste Glied von diesem Product ab, und dividire den Rest, mit dem um 1 verringerten Exponenten.

Den Beweis von der Richtigkeit dieser Regel, kann man auf verschiedene Weise führen, d. h. man kann die Formel, welche das Aequivalent von S darstellt, auf mehr, als nur eine Art deduciren. Ich habe sie von der Proportion

$$a : ae = S - u : S - a,$$

abgeleitet, und deren zuverlässige Statthaftigkeit als ausgemacht, und aller Erfahrung gemäs, vorausgesezt. Man kann aber auch von der Richtigkeit dieser zwei Verhältnisse selbst einen strengern Beweis fordern. Es mag hier noch beigehängt stehen:

§. 119. Man denke einmal eine Reihe von 4 Gliedern. Da ist gewiß $u = e^3a$; und

$$S = a + ae + e^2a + e^3a.$$

Daher $S - u = (a + ae + e^2a.)$

Hierauf denke man die drei Glieder der Proportion so:

$$a : ae = (a + ae + e^2a) : x$$

Das vierte muß nothwendig $= (ae + e^2a + e^3a)$ heissen, weil nehmlich $(a : ae)$ so viel, als $(1 : e)$

(1 : e) ist, und daher blos e in das 3te Glied multiplicirt. Das eben herausgekommene vierte aber enthält unleugbar die Summe aller Glieder, das erste ausgenommen; indem blos + a darein fehlt, d. h. es beträgt S — a; und somit ist erwiesen, daß hier

a zu ae = wie S — u zu S — a

sich verhalte; freilich aber nur erst bei der Annahme einer Progression von 4 Gliedern in dem vorgelegten Fall erwiesen. Allein, der Erfolg wäre auf eben die Art ausgefallen, wenn man auch eine Progression von 5 Gliedern angenommen hätte; Da würde das 3te Glied, wenn S — u entwickelt gesezt wird, natürlich

$$S - u = a + ae + e^2a + e^3a$$

geheissen haben; und das lezte alsdenn ganz gewiß

$$(ae + e^2a + e^3a + e^4a) \text{ d. i. } = S - a.$$

Eben so kann man die Ueberzeugung erhalten, wenn man 6 Glieder einer geom. Reihe, wenn man 7, . . . wenn man n Glieder annimmt.

Wer nur etliche Augenblicke über die Art nachdenkt, wie das 4te Glied erzeugt wird, muß sich gedrungen fühlen, zu gestehen, daß bei mehrern Gliedern der Erfolg gar nicht anders ausfallen könne, sondern daß ein Gesez bei wenigen, wie bei vielen Gliedern, ganz unwidersprechlich statt haben müsse.

Bei einigen Mathematikern kommen indessen auch noch andere Deductionen vor, welche die Unumstöslichkeit der angezeigten Verhältnisse darthun. Die eben mittgetheilte mag uns aber wohl hier genügen.

Man wird sehr selten in den Fall kommen, nach der Summe einer geom. Progression, deren Glieder ganze Zahlen sind, zu fragen. Aber Reihen von Brüchen, welche in einer solchen Progression fortlaufen, zu summiren, dieß Geschäft begegnet dem Mathematiker, der etwas mehr, als gemeine Handels-Rechnungen zu führen hat, öfters. Indessen muß ich nähere Ausführungen darüber gegenwärtig ausgesezt seyn lassen, um für den folgenden Abschnitt, welcher einer der wichtigsten in diesem Buch seyn dürfte, mehr Raum zu gewinnen.

XIV. Abschnitt.

Von der Decimal-Rechnung.

§. 120.

Decimalbrüche sind Brüche, deren Nenner Potenzen der Zahl 10 oder 10 selbst sind, welche aber nach einer gewissen Abkürzungs-Methode geschrieben werden.

An-

Anstatt $\frac{1}{10}$ schreibt man 0,1
Anstatt $\frac{2}{10}$ 0,2
Anstatt $\frac{3}{10}$ 0,3

Da ist der Nenner immerdar 10, oder zehn in der ersten Potenz. Auch noch in folgenden Beispielen:

Anstatt $1\frac{1}{10}$ schreibt man 1,1
Anstatt $2\frac{1}{10}$ 2,1
Anstatt $3\frac{1}{10}$ . . . . 3,1 u. s. f.
Anstatt $2\frac{3}{10}$ 2,3
Anstatt $2\frac{7}{10}$ 2,7
Anstatt $4\frac{9}{10}$ 4,9
Anstatt $10\frac{1}{10}$ 10,1
Anstatt $23\frac{7}{10}$ . . . . 23,7.

Ist der Nenner 10 in der zweiten Potenz, oder 100, so ist die Darstellung im Decimalausdruk folgende:

Anstatt $\frac{1}{100}$ schreibt man 0,01
Anstatt $\frac{2}{100}$ 0,02
Anstatt $\frac{3}{100}$ . . . . 0,03 u. s. f.
Anstatt $\frac{11}{100}$ 0,11
Anstatt $\frac{12}{100}$ 0,12
Anstatt $\frac{13}{100}$ . . . . 0,13.

Kommt eine Zahl vor, welche ein Ganzes mit einem angehängten Bruch bedeutet, so ist die Bezeichnung gleichförmig, folgende:

Anstatt

Anstatt $1\frac{1}{100}$ schreibt man 1,01
Anstatt $1\frac{11}{100}$ 1,11
Anstatt $2\frac{13}{100}$ 2,13
Anstatt $10\frac{11}{100}$ 10,11
Anstatt $23\frac{7}{100}$ 23,07
Anstatt $23\frac{79}{100}$ . . . . 23,79.

Ist der Nenner 10 in der 3ten Potenz, oder 1000, so ist die Bezeichnung folgende:

Anstatt $\frac{1}{1000}$ wird geschrieben 0,001
Anstatt $\frac{2}{1000}$ . . . . 0,002 u. s. f.
Anstatt $\frac{11}{1000}$ 0,011
Anstatt $\frac{113}{1000}$ 0,113
Anstatt $7\frac{43}{1000}$ . . . . 7,043.

Nach Vorausschickung dieser Beispiele, welche blos dienen sollen, die äußre Form der Decimalbrüche kennen zu lernen, müssen nun auch die Gründe dieser Bezeichnungsart erklärt werden. Diese Gründe sind sehr einfach:

§. 121. Wir kennen bereits aus dem 1sten Abschnitt, die einmal angenommene Beziferungsart, nach welcher ganze Zahlen, wenn sie über 10 und 100 hinausreichen, in Abkürzung dargestellt werden. Anstatt zweihundert, und drei und siebenzig etwa, wie folgt, zu bezeichnen:

$$2.100 + 7.10 + 3$$

3 schrei-

schreiben wir kurz: 273; und denken also blos 2, mit 10 in der zweiten Potenz multiplicirt, ohne diese Potenz aufs Papier zu schreiben; eben so 7 bedeutet in der Stelle, wo die Zifer hier steht, zehnmal so viel, 70, oder 7 mit 10 in der 1sten Potenz multiplicirt. Endlich gilt blos 3 einfach drei.

Ums Zehnfache gilt also jede Zifer weniger, je weiter sie von der linken zur rechten in den Stellen fortgerükt worden. In 777 bestimmt offenbar die Stelle den Werth von jeder Zifer; eben so in 333.

Wenn nun eine (kleinere) Gröse vorhanden wäre, welche zehnfach-geringern Gehalt hätte, als z. B. die lezte 7 in 777, (welche 7 unter die Einer gehört); wenn etwa $\frac{7}{10}$ noch über die ganze Zahl 777 vorhanden wäre, sollte es nicht wohl verstattet, und natürlich seyn, den Betrag von $\frac{7}{10}$ blos durch die Stelle, und blos durch Fortrücken (gegen die Rechte zu) darzustellen, wie hier steht:

777,7

wo das Strichlein andeutete, die ganze Zahlen hörten da auf, und was jenseits stehe, habe zehnfach geringern Werth, als die Einer der lezten Stelle.

Eben darnach würde $273\frac{7}{10}$ geschrieben 273,7. Die Gründe, diese Abkürzungsart anzunehmen, sind ganz und gar eben dieselbe, welche

welche bei ganzen Zahlen schon längst als rechtlich angenommen worden sind. Es läßt sich kaum natürlicher fortschliessen, als hiebei geschlossen wird.

Die ganze Decimal-Beziferung ist daher in der That blos eine Fortsetzung dessen, was die Alten den Actum numerationis nannten. Es sind eben die Ursachen der Abkürzung vorhanden, und es ist beinahe unbegreiflich, daß die Arithmetiker der Vorzeit nicht früher auf die Darstellung der Decimalbrüche in der so bequemen abgekürzten Form, von welcher das vorige Blatt mehrere Beispiele enthält, gerathen sind.

§. 122. Sind keine ganze Zahlen vorhanden, blos ein Bruch mit dem Nenner 10, z. B. $\frac{7}{10}$ allein; so ist der Ausdruk: 0,7. Die Nulle vor dem Strichlein deutet an, daß ganze fehlen. Auch diese Bezeichnungsart ist gewiß sehr natürlich *). Denn 0 bezeichnet

*) Es ist kaum glaublich, wie leidenschaftlich Arithmetiker, welche in ihrer Jugend einmal Decimalrechnung nicht zu lernen Gelegenheit gehabt haben, oft gegen die ganze Methode sich auslassen. — „Kann eine Rechnungsart toller seyn, (sagte einmal ein sonst gescheuter Kaufmann zu mir), als die, nach der man die Nullen vorne hin sezt? Was braucht es weiter, als blos die Ansicht, um die ganze Pedanterei zu verwerfen? —“ Wenn Männer,

ja überall in Arithmetik die Abwesenheit einer Zahlgröse. Wenn man nun die Bedingung fest sezt: „Alle Zifern, welche zur Linken des „Strichleins stehen, sollen ganze Zahlen be„deuten; und die nächste dran hinter dem Strich„lein nur Zehntheilchen," was kann daraus mehr direct folgen, als daß man o sezze, so oft Fälle vorkommen, in denen die Ganzen eben gar nicht vorhanden sind, in denen sie etwa durch Abzug oder auf andre Weise weggekommen seyn mögen, und daß in dem Fall hinter dem Strichlein allein Zifern stehen dürfen? —

Kommen keine Zehntheilchen, sondern blos Hunderttheilchen vor, so muß die Stelle, in welche diese zu sezen sind, weiter gegen die rechte Hand zu genommen werden. Z. B. $\frac{7}{100}$ muß 0,07 geschrieben werden. Die Geseze

lichkeit

ner, die so rasch aburtheilen, oft nur die Geduld hätten, zwei oder drei Blätter in irgend einem arithmetischen Werk, in welchem die Vortheile des Decimal-Calküls deutlich gezeigt werden, aufmerksam durchzulesen; sie würden gewiß ihre unbesonnene Aeusserungen zurüknehmen. Nicht zwei Stunden sind nöthig, den, der belehrt seyn will, und schon im Rechnen geübt ist, in seinen Vorurtheilen zu bekehren. Und die 2 Stunden scheinen doch Tausenden verlorne Zeit. — Der Schade ist sehr gros, der für das ganze Studium der Mathematik überall in Deutschland daraus erwächst, daß Männer von Ansehen die erwähnte Ungeduld, und — so wenig Zeit übrig haben!

lichkeit, welche in dem ganzen Zahlensystem beobachtet wird, erfordert diese Fortrückung; $\frac{7}{100}$ ist ja zehnmal weniger, als $\frac{7}{10}$; so wie $\frac{7}{10}$ zehnmal kleiner als 7 ist.

Wären etwa Zehntheilchen und auch Hunderttheilchen, aber keine ganze Zahlen vorhanden, z. B. $\frac{3}{10} + \frac{7}{100}$, so ist die Bezeichnung: 0, 37; und diese Grösse wird 37 Hunderttheilchen ausgesprochen. Die zwei Brüche $\frac{3}{10}$ und $\frac{7}{100}$ sind nehmlich eben so viel, als $\frac{37}{100}$, wie jeder einsehen wird, der sie, unter einen Nenner reducirt, sich nur vorstellen mag:

$\frac{300}{1000} + \frac{70}{1000}$ ist $\frac{370}{1000}$ d. i. $\frac{37}{100}$

womit dann der kurze Ausdruk 0, 37 für die Summe beeder Brüche hinlänglich gerechtfertigt erscheinen wird.

Kommt eine Zahl vor, welche neben ganzen noch einen Bruch angehängt hat, wie z. B. $6\frac{37}{100}$; so kann nun in der Bezeichnung wohl nicht mehr gefehlt werden; sie ist 6, 37. Die ganze Zahl 6 nimmt jezt die Stelle der Nulle vor dem Strichlein ein. Hiesse etwa die ganze Zahl 60, der Bruch aber bliebe ebenderselbe, so würde die Bezeichnung natürlich seyn: 60,37.

Die Gründe dieser Darstellung beruhen auf einer und ebenderselben Gesezlichkeit, welche (nach dem, was angeführt worden) nun niemand mehr räthselhaft seyn dürfte.

§. 123. Folgende Betrachtungen, welche sich aus den lezten zwei Blättern ergeben, dürfen unsrer Aufmerksamkeit nicht entgehen:

Decimalbrüche sehen, dem ersten Anblik nach, aus, wie ganze Zahlen; aber dem Gehalt nach stellen sie sehr kleine Theile eines gewissen Ganzen, einer gewissen gedachten Einheit, dar; und diese Theile werden kleiner und kleiner, je mehr Zifern vorkommen, welche hinter dem Strichlein, oder von diesem entfernt stehen, von der linken Hand gegen die rechte zu gezählt. 0,125 ist weniger, als 0,25; ist nur halb so viel, (indem 0,125 so viel, als $\frac{1}{8}$, und 0,25 so viel als $\frac{1}{4}$ bedeutet), und doch sind 0,125 mehr Zifern, als 0,25.

Desgleichen 0,4375 beträgt so viel, als $\frac{7}{16}$. Dagegen bedeuten

0,5 = $\frac{8}{16}$ oder $\frac{1}{2}$

und 0,625 = $\frac{10}{16}$ oder $\frac{5}{8}$.

Wer noch nichts von Decimalen gehört hat, dem kommt das freilich etwas wunderlam vor, weil er blos an die Ordnung ganzer Zahlen gewöhnt ist, und, ihm, so oft sein Auge z. B. 5 und 4375 vor sich sieht, der Schluß; 4375 sei die grösre Zahl, (weil sie vier Zifern enthält, und 5 nur eine) sehr geläuffig ist. In Decimalen aber soll jezt 0,5 mehr, als 0,4375. bedeuten.

Eine kurze Ueberlegung hebt diese Anstöslig-

keit. Die erste Zifer nach dem Strichlein, welche

Zehn-

Zehntheilchen angiebt, entscheidet über die Gröse eines Decimalbruchs, wenn er mit einem andern verglichen wird. In dem angeführten Bruch 0,125 ist 1 die erste Zifer; sie deutet an, es sei 1 Zehntheilchen vorhanden; alsdenn aber seien wohl noch drüber 2 Hunderttheilchen, und 5 Tausendtheilchen angehängt. Man denke sich unter diesen Bruch: 0,125;

direct hingestellt: 0,25.

In dem lezten Bruch kommen zunächst, nach dem Strichlein zwei Zehntheilchen vor. Er ist also gröser, als der erstere; (als 0,125) weil zwei Zehntheilchen mehr als nur eines betragen. Die nachfolgende Hundert- und Tausendtheilchen können nun nichts weiter dagegen entscheiden. Die vorhandene Zahl der grösten Theilchen, welche unmittelbar nach dem Strichlein stehen, bestimmt den grösern Gehalt. Und, wenn auch anstatt, 0125 folgende Brüche 0,135; 0,145, 0,155,.... 0,195 mit 0,25 verglichen würden; so bleibt 0,25 doch immer gröser, weil 0,19 noch nicht 0,2 erreicht. Man vergleiche nur 0,19, d. i. $\frac{19}{100}$ und 0,2, d. i. $\frac{2}{10}$ oder $\frac{20}{100}$. Offenbar steht also, 0,2 um $\frac{1}{100}$ höher, als 0,19.

Die lezte zwei Brüche leiten zu folgender Erwägung hin, wodurch jede hierher gehörige Bedenklichkeit vollends beseitigt werden muß:

Jedem der bisher angeführten Decimalbrüche, läßt sich eine Nulle, auch zwei, auch drei

drei .... anhängen, ohne daß sein Gehalt selbst dadurch geändert würde.

0,5 ist so viel, als 0,50; und auch als 0,500.

Warum? wie mag dieß angehen? Die Antwort ist kurz:

Weil $\frac{5}{10}$ so viel, als $\frac{50}{100}$; und auch so viel, als $\frac{500}{1000}$ ist. Also ist auch 0,3 so viel, als 0,30; weil $\frac{3}{10}$ nicht mehr, als $\frac{30}{100}$ beträgt. Kaum ist es nöthig, in die Lehre von Umbildung gewöhnlicher Brüche (in §. 35 bis §. 39) hiebei zurükzuweisen. Es lassen sich gar keine vernünftige Einwendungen gegen die Behauptung selbst nur denken.

Daraus folgt aber unmittelbar, daß auch

anstatt 0,25 sich 0,250

schreiben lassen werde; weil ja

$\frac{25}{100}$ und $\frac{250}{1000}$ allemal $\frac{1}{4}$

und der lezte Bruch mit dem Nenner: Tausend, gewiß nicht mehr, als der mit dem Nenner: Hundert beträgt. Offenbar ist demnach 0,250 so viel, als 0,25.

Jezt vergleiche man wieder die angeführte und verglichene Decimalbrüche: 0,125 und 0,25. Schreibt man den leztern, (wie man sicher kann,) in drei Ziffern 0,250; und

stellt ihn unter oder neben 0,125

so fällt wohl auch bei dem schwächsten Anfänger die Möglichkeit aller Irrung und Anstößigkeit hinweg. Die erste Ansicht legt jezt 0,250 schon gröser,

als

als 0,125 dar. Folglich ist auch 0,25 allein für sich gröser. Ebenso verhält es sich mit 0,4375 und 0,625. Man schreibe nur 0,4375 und 0,6250; so muß man im ersten Augenblik sogleich zugestehen, daß der leztere dieser Brüche mehr, als der erstere betrage.

§. 124. Die Kunst, gewöhnliche Brüche in Decimalbrüche zu verwandeln, muß nunmehr gelehrt werden.

Wenn die gewöhnliche Brüche 10 oder Potenzen von 10 zum Nenner haben, so ist diese Kunst schon in den zwei vorherg. §phen wohl hinlänglich offenbar dargelegt.

Anstatt $\frac{9}{10}$ schreibt man 0,9

Anstatt $\frac{9}{100}$ . . . 0,09

Anstatt $\frac{9}{1000}$ . . . 0,009 u. s. f.

Laßt uns aber nun auch Brüche vor die Hand nehmen, deren Nenner nicht 10 heissen sollen, sondern halb so viel; z. B. $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$. Wie kann man diese Brüche in Decimalbrüche verwandeln?

1) Man multiplicire den Nenner mit einer so gewählten Zahl, daß das Product 10 gebe; und setze diese neue Zahl auch in den Zähler, als Factor zu 1, oder zu 2, oder zu 3.

2) Damit wird man einen Bruch vor sich bekommen, welchen man sehr leicht (nach §. 120

und 121) in einen Decimalbruch verwandelt, wird darstellen können.

In dem Beispiel $\frac{1}{5}$ denke man so: 5 mit 2 multiplicirt giebt einen Nenner 2.5 oder 10; die gewählte Zahl 2 werde in den Zähler gesezt; oder hier mit 1 multiplicirt. Man erhält damit $\frac{1.2}{5.2}$; das ist $\frac{2}{10}$. Aber $\frac{2}{10}$ läßt sich nach §. 121 schreiben 0,2. Damit ist $\frac{1}{5}$ in einen Decimalbruch verwandelt 0,2, welcher eben den Werth hat, weil $\frac{2}{10}$ unleugbar eben den Werth, wie $\frac{1}{5}$, hat.

Eben so verhält sichs mit der Umbildung von $\frac{2}{5}$. Man denke: Eben so viel ist $\frac{2.2}{5.2}$; das ist aber $\frac{4}{10}$; und dieser Bruch wird 0,4 im Decimalausdruk geschrieben.

Desgleichen $\frac{3}{5}$ ist $\frac{3.2}{5.2}$ gleich; das ist $\frac{6}{10}$; und dieser Bruch ist zu schreiben 0,6.

So fahre man fort: $\frac{4}{5}$ ist $\frac{4.2}{5.2}$ gleich; d. i. $\frac{8}{10}$; und eben so viel gilt 0,8.

Weiter $\frac{5}{5}$ ist $\frac{5.2}{5.2} = \frac{10}{10}$ oder 1,0; welches nicht mehr, als 1 beträgt, worüber auf dem vorhergehenden Blatt in besondren Bemerkungen ja der Aufschluß gegeben worden.

Weiter $\frac{6}{5}$ ist so viel, als $\frac{6.2}{5.2}$ oder $\frac{12}{10}$; das ist $1\frac{2}{10}$ oder 1,2; dem gemäs, was in §. 122 deutlich gelehrt worden.

Ferner $\frac{7}{5}$ ist $\frac{7.2}{5.2}$ oder $\frac{14}{10}$ gleich; das ist so viel, als $1\frac{4}{10}$. Daher 1,4 gleichgeltend ist.

Hieraus

Hieraus erhellet nun, daß Brüche, deren Nenner 5 heißt, sich äußerst leicht in Decimalbrüche verwandeln lassen. Der Factor 2, im Nenner und Zähler angewandt, führt vollkommen zum Ziel.

Der nächste Fall, in welchem das Verfahren eben so leicht ist, tritt bei der Aufgabe ein: die Brüche

$\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{5}{2}$ u. s. f.

in Decimalbrüche zu verwandeln.

Da ist die Vorschrift wieder: Bilde den Nenner, 2, zu 10 um, d. i. mult. ihn mit 5; und alsdenn multiplicire den Zähler ebenfalls mit 5; damit der Gehalt des Bruchs selbst ebenderselbe bleibe. Der neue Bruch wird sich damit so leicht, wie in den bisherigen Beispielen, in einen Decimalbruch verwandeln lassen.

Z. B. bei $\frac{1}{2}$ multipl. 2 mit 5, und auch 1; so erhältst du $\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5}$, d. i. $\frac{5}{10}$; welches im Decimal-Ausdruk 0,5 geschrieben wird. Also ist $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Weiter aus $\frac{3}{2}$ formire $\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5}$, d. i. $\frac{15}{10}$. Eben so viel ist $1\frac{5}{10}$; und im Decim. Ausdruk: 1,5.

$\frac{5}{2}$ ist $= \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 5}$, d. i. $\frac{25}{10}$ oder $2\frac{5}{10}$, d. i. 2,5.

Gleichförmig verfahre man mit allen Brüchen, welche 2 zum Nenner haben.

Die Kunst also, Brüche, deren Nenner 5, oder 2, heissen, in Decimalbrüche zu verwandeln, ist damit sehr bald gelernt.

§. 125. Aber, wie ist dann zu verfahren, wenn ein Bruch vorgegeben wird, dessen Nenner 3 hieße? wie kann man diesen in einen Decimal-Bruch verwandeln?

Die Neugier, welche darnach fragt, soll gar bald befriedigt werden. Zuvörderst wollen wir uns aber (aus gutem Bedacht) mit solchen Brüchen beschäftigen, deren Nenner Potenzen von 5 und von 2 sind.

Wie werden also $\frac{1}{25}$; $\frac{2}{25}$; $\frac{3}{25}$ . . .
und alsdenn $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$ . . .
in Decimal-Brüche verwandelt? sei die Frage, welche wir zunächst beantworten wollen. Offenbar ist 25 die zweite Potenz von 5; und 4 die zweite Potenz von 2.

Da ist die Vorschrift: Multipl. den Nenner mit einem solchen Factor, daß das Product = 100 werde; und setze diesen gewählten Factor sogleich auch in den Zähler. Der Erfolg wird sehr leicht zu übersehen seyn.

Z. B. Anstatt $\frac{1}{25}$ setze $\frac{1.4}{25.4}$, d. i. $\frac{4}{100}$; im Decimal-Ausdruk ist eben so viel 0,04.

Anstatt $\frac{2}{25}$ setze $\frac{2.4}{25.4}$, d. i. $\frac{8}{100}$. Im Dec. Ausdruk ist gleich so viel 0,08. Also ist $\frac{2}{25}$ gleichbedeutend mit 0,08.

So fahre fort:

$\frac{3}{25}$ ist $= \frac{3.4}{25.4} = \frac{12}{100}$, d. i. 0,12.

$\frac{4}{25}$ ist $= \frac{4.4}{25.4} = \frac{16}{100}$, d. i. 0,16.

Hierauf

Hierauf wende man eben die Vorschrift zu Umbildung der Brüche $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$ an.

Anstatt $\frac{1}{4}$ wird man $\frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25}$, d. i. $\frac{25}{100}$ setzen müssen. Im Dec. Ausdruk ist eben so viel: 0,25.

Anstatt $\frac{2}{4}$ wird man $\frac{2 \cdot 25}{4 \cdot 25}$ d. i. $\frac{50}{100}$ setzen müssen. Eben so viel ist 0,50; oder kürzer 0,5. (Siehe in §. 123 zurük.)

Anstatt $\frac{3}{4}$ schreibe $\frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25}$, d. i. $\frac{75}{100}$. Im Decim. Ausdruk ist eben so viel 0,75.

Hieraus erhellet nun wohl zur Genüge, wie man alle Brüche, deren Nenner 5, und auch 25; desgleichen alle, deren Nenner 2, und 4 sind, in Decimalbrüche verwandeln könne.

§. 126. Man denke sich

5; 25; 125; und 2; 4; 8;
5; 5^2; 5^3; 2; 2^2; 2^3;

um damit Grösen der 3ten Potenz vor Augen zu haben; so wird begreiflich, daß die nächste Frage dahin gehen müsse: Wie werden Brüche, deren Nenner 125 hiesse, wie auch 8, in Decimal-Brüche verwandelt?

Antwort: Bei den Brüchen $\frac{1}{125}$; $\frac{2}{125}$; $\frac{3}{125}$ multiplicire mit 8 in den Nenner und in den Zähler;

und bei den Brüchen $\frac{1}{8}$; $\frac{2}{8}$; $\frac{3}{8}$ . . . multiplicire mit 125 in den Nenner, und in den Zähler;

ler; so wirst du zu dem vorgesezten Ziele gelangen.

Nehmlich $\frac{1}{125}$ ist so viel, als $\frac{8}{125 \cdot 8}$ d. i. $\frac{8}{1000}$; und dieser Bruch wird im Decim. Ausdruk 0,008 geschrieben.

$\frac{2}{125}$ ist $\frac{2 \cdot 8}{125 \cdot 8}$ gleich, d. i. $\frac{16}{1000}$; oder 0,016.

$\frac{3}{125}$ ist $\frac{3 \cdot 8}{125 \cdot 8}$ gleich, d. i. $\frac{24}{1000}$; oder 0,024.

Mit den Brüchen, deren Nenner 8 sind, verfahre man gleichförmig. Der Multiplicator ist allemal 125.

$\frac{1}{8}$ ist $= \frac{125}{125 \cdot 8}$ d. i. $\frac{125}{1000}$; und im Decimal-Ausdruk ist gleich so viel 0,125.

$\frac{2}{8}$ ist $\frac{125 \cdot 2}{125 \cdot 8} = \frac{250}{1000}$; d. i. 0,250 oder kürzer hier (nach §. 123), blos 0,25

$\frac{3}{8}$ ist $\frac{125 \cdot 3}{125 \cdot 8} = \frac{375}{1000}$, d. i. 0,375.

Hieraus ergiebt sich, daß aus allen Brüchen, deren Nenner Grösen der 3ten Potenz von 5 und von 2 sind, tausendtheilige Decimalbrüche werden. Denn in 0,375 steht die Zifer 5 allerdings in der Stelle der Tausendtheilchen.

Und nunmehr ist es kaum nöthig, sich weiter bei den auf gleichem Wege fortgesezten Fragen nur noch über eine Seite lang aufzuhalten.

Kommen Brüche vor, deren Nenner 5 in der 4ten Potenz hieße, d. i. 5^4 oder 625;

so

so ist der Multiplicator in den Zähler und in den Nenner 16 oder 2^4.

Und umgekehrt, kommen Brüche vor, deren Nenner 2 in der 4ten Potenz oder 16 wäre; so ist der Multiplicator, in den Zähler und in den Nenner, 5 in der 4ten Potenz oder 625.

Beispiele: $\frac{1}{625}$ ist so viel, als $\frac{1}{625} \cdot \frac{16}{16}$;

das ist $\frac{16}{10000}$; oder 0,0016.

Und $\frac{2}{625}$ ist $\frac{2}{625} \cdot \frac{16}{16}$ gleich; d. i. 0,0032.

Umgewendet, wenn $\frac{1}{16}$; $\frac{2}{16}$; $\frac{3}{16}$ . . zur Umbildung vorgelegt werden, geht dieselbe gleichförmig von statten:

$\frac{1}{16} \cdot \frac{625}{625}$ ist so viel, als $\frac{625}{10000}$

und im Decimal-Ausdruk: 0,0625.

$\frac{2}{16}$ ist $= \frac{2}{16} \cdot \frac{625}{625}$, d. i. $\frac{1250}{10000}$; und im Decimal-Ausdruk 0,1250; (welche Gröse der 0,125 ganz gleich ist, dem Vortrag in §. 123 gemäs.)

So kann man fortfahren, bei Brüchen, deren Nenner 5 in der 5ten Potenz, oder 3125; und auch 2 in der fünften Potenz, oder 32 wäre. Der Multiplicator ist immer von ebenderselben Potenz.

$\frac{1}{3125}$ ist $= \frac{1}{3125} \cdot \frac{32}{32}$; d. i. $\frac{32}{100000}$ od. 0,00032.

und $\frac{1}{32}$ ist $= \frac{1}{32} \cdot \frac{3125}{3125}$; d. i. $\frac{3125}{100000}$ od. 0,03125.

Alsdenn kommen die Nenner von 5 in der 6ten Potenz 15625, und 2 in der 6ten Potenz 64. Das Verfahren ist ganz ebendasselbe.

Die

Die Art und Weise ist damit gelehrt, wie man alle vollendete Decimalbrüche bilden kann. Blos aus Brüchen, deren Nenner

Fünf und Zwei
oder Potenzen von beeden;
oder Factoren von ihnen sind;

lassen sich vollendete oder endliche Decimalbrüche formiren. Aus allen andern Brüchen, welche andre Nenner haben, lassen sich blos

unvollendete oder unendliche
Decimalbrüche

durch Umbildung herausbringen. Der Unterschied soll nun sogleich gezeigt werden. Das nächstfolgende Blatt enthält die nothwendige Vorbereitung dazu:

§. 127. Man denke sich, alle bisherige angeführte Decimalbrüche seien auf folgende Art hervorgegangen:

$\frac{1}{4}$ ist $\frac{25}{100}$. Daraus läßt sich die Proportion bilden:

4 zu 1 = wie 100 zu 25
= 1 zu $\frac{25}{100}$.

Der lezte Bruch ist im Decim. Ausdruk 0,25 nach §. 121.

Ferner $\frac{3}{25}$ ist $\frac{12}{100}$. Daher

25 zu 3 = wie 100 zu 12
= 1 zu $\frac{12}{100}$, d. i. 0,12.

Solche zwei Proportionen lassen sich bei jedem Decimalbruch zum Grund legen. Oefters

kann

kann es nothwendig seyn, in das 3te Glied auch 1000, auch noch höhere Potenzen von 10 zu setzen.

Z. B. bei $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

$$8 : 7 = 1000 : 875$$
$$= 1 : \frac{875}{1000}, \text{ d. i. } 0{,}875.$$

Hätte man hier blos 100 in das 3te Glied eingesezt, so würde das lezte Glied in der 2ten Proportion geheissen haben:

$$\frac{87\frac{1}{2}}{100} \text{ oder } \left(\frac{87}{100} + \frac{1}{200}\right).$$

In sehr vielen Fällen dürfte der Anhang des lezten Bruchs $\frac{1}{200}$ nicht in der Strenge mitzunehmen seyn, und schon $\frac{87}{100}$ oder 0,87 für $\frac{7}{8}$ hinreichen. Z. B. wenn von Pfunden und Lothen die Rede wäre, und jemand käme in der Rechnung auf das Resultat hinaus: es seien vorhanden $19\frac{87}{100}$ Pfund; oder im Dec. Ausdruk 19,87. so würde gewiß von jedem Kaufmann dafür gesezt werden: $19\frac{7}{8}$ Pf.

Warum hierauf gegenwärtig zu merken sei, wird gar bald erhellen.

Man nehme noch ein Beispiel:

$\frac{5}{16}$ ist = 0,5625. Die Proportionen dazu sind:

$$16 : 5 = 10000 : 5625$$
$$1 : \frac{5625}{10000}.$$

Stünde hier in dem 3ten Glied blos 100; so würde das lezte in der 2ten Prop. heissen:

$\frac{56\frac{1}{4}}{100}$ oder $\frac{56}{100} + \frac{1}{400}$.

Und auch hier dürfte daher in sehr vielen Fällen schon

$\frac{56}{100}$ oder 0,56 für $\frac{5}{16}$

in Rechnung angenommen werden, indem $\frac{1}{400}$ sehr oft allerdings keiner Bedeutung werth geachtet wird. Aber mehr Genauigkeit würde doch beobachtet, wenn in der 3ten Proportion 1000 gestanden hätte, daraus auf $\frac{562\frac{1}{2}}{1000}$ gefolgert, und hievon in der Anwendung $\frac{562}{1000}$ oder 0,562 für $\frac{5}{16}$ gebraucht worden wäre. Da wäre blos $\frac{1}{2000}$ weggelassen worden, worauf im gemeinen Leben äusserst selten Rüksicht genommen wird.

Ganz genau ist und bleibt aber freilich

$\frac{5}{16} = 0{,}5625$ oder $\frac{5625}{10000}$.

Das alles ist Vorbereitung, um die Bildung unendlicher Decimalbrüche zu verstehen.

§. 128. Laßt uns jezt Brüche vor die Hand nehmen, (gewöhnliche) deren Nenner 3, 6, 7, ... heissen sollen; also keine mehr, deren Nenner 5 oder 2, oder Potenzen von beeden wären.

Man nehme einmal $\frac{2}{3}$ vor sich, und frage: wie läßt sich dieser Bruch in einen Decimalbruch verwandeln?

Man

Man darf ohne Zweifel wieder Proportionen aufstellen, wie in dem nächstvorh. §. 127 sind aufgestellt worden. Ganz gleichförmig wird darnach zu setzen seyn:

$$3 \text{ zu } 2 = \text{wie } 100 \text{ zu } \tfrac{200}{3} \text{ od. } 66\tfrac{2}{3}$$

$$\text{also auch} = 1 \text{ zu } \frac{66\frac{2}{3}}{100}$$

Sezte man hier anstatt 100 in das 3te Glied 1000, so würde in der 2ten Proportion das lezte Glied heissen:

$$= 1 \text{ zu } \frac{666\frac{2}{3}}{1000}$$

Ohne Zweifel wird $\frac{66}{100}$ in sehr vielen Fällen für $\frac{2}{3}$ schon angenommen, ohngeachtet eigentlich

$$[\tfrac{66}{100} + \tfrac{2}{300}] \text{ erst rein} = \tfrac{2}{3}$$

betragen. Wenn von Gulden die Rede ist, wird wohl niemand Anstand nehmen, wenn ihm etwa vorkäme: $4\frac{66}{100}$ dafür 4 Gulden, 40 Kreuzer, d. i. $4\frac{2}{3}$ Gulden zu setzen, und den überschiessenden Bruch nicht zu achten. Aber $4\frac{66}{100}$ wird im Decimal-Ausdruk 4,66 geschrieben. Daher wird dann auch gar oft schon

0,66 für $\frac{2}{3}$

gültig seyn.

Genauer und der Wahrheit näher wird man aber doch setzen: 0,666 sei für $\frac{2}{3}$ zu nehmen.

Denn aus der angeführten zweiten Proportion ergiebt sich

$$3 \text{ zu } 2 = 1 \text{ zu } \frac{666\frac{2}{3}}{1000}$$

d. i. $(\frac{666}{1000} + \frac{2}{3000})$.

Nun läßt sich $\frac{2}{3000}$ allemal noch unbedenklicher weglassen, und übersehen, als $\frac{2}{300}$; daran wird kein Mensch zweifeln. Es wird daher der Bruch

$\frac{666}{1000}$ oder 0,666

sehr sicher in unzähligen Fällen, anstatt des Bruchs $\frac{2}{3}$ gebraucht werden können.

Denkt man sich in dem 3ten Glied gar 10000 eingeschrieben, so folgt daraus:

$$3 : 2 = 1 : \frac{6666\frac{2}{3}}{10000}$$

und $\frac{6666}{10000}$ oder 0,6666. wird dem wahren Bruch $\frac{2}{3}$ noch näher liegen. Es wird dabei eine äusserst unbedeutende Unrichtigkeit noch vorhanden seyn, indem der Ueberschuß $\frac{2}{30000}$ auf keine Zahlung und auf keinen Abbruch irgend einer Schuld nur Einfluß haben kann, ganz ausserordentliche Fälle etwa ausgenommen.

Hieraus erhellet nun wohl zur Genüge, daß sich

$\frac{2}{3}$ schon ziemlich genau durch 0,66
aber noch genauer durch 0,666
und noch genauer durch 0,6666

ausdrücken lasse; auch daß sich natürlich diese Genauigkeit noch fortsetzen und immer weiter,

ja

ja so weit, als man nur wolle, treiben lasse. Denn man darf ja nur in das 3te Glied der aufgeführten Proportionen eine höhere Potenz von 10 einschreiben, z. B. 10^7, so wird das lezte Glied 666666 heissen, und also auch

$\frac{2}{3} = 0{,}666666\ldots$

daraus folgen, zwar immer nur in einer Näherungs-Gleichung, in welcher aber in der That der Fehler beinahe zu nichts verschwinden kann, weil man auf so kleine Theilchen, als man nur mag, fortzuschreiten, das Recht, und auch die Gewalt dazu hat.

Ganz rein den Bruch $\frac{2}{3}$ in Decimalen darzustellen, dieses geht nun freilich nicht an. Wer die Proportionen, welche angegeben worden, aufmerksam betrachtet, wird sich leicht davon überzeugen. Die Division geht niemals ganz auf; es bleibt immer ein Rest noch zurük, so weit man auch fortschreiten mag. Es läßt sich daher $\frac{2}{3}$ blos durch

einen unvollendeten oder unendlichen Decimalbruch

ausdrücken; das wird jezt wohl jedem einleuchtend seyn. Daß aber ein solcher unvollendeter Decimal-Bruch in der Anwendung doch eben so gut, wie ein vollendeter, benüzt werden könne, wird sich in den nächsten Blättern erst ganz zur Genüge darlegen lassen.

§. 129. Es ist wohl nöthig, daß wir noch einige Beispiele geben, wie auch andre Brüche mit andern Nennern gleichförmig in Decimal-Ausdrücken aufzuführen seien:

Es sei aufgegeben: $\frac{5}{6}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln. Man denke sich

$$6 \text{ zu } 5 = 100 \text{ zu } 83\tfrac{1}{3}$$
$$= 1 \text{ zu } \frac{83\frac{1}{3}}{100}.$$

Offenbar ist darnach

$\frac{5}{6}$ so gros, als $\frac{83}{100} + \frac{1}{300}$.

Es wird aber, da $\frac{83}{100}$ oder 0,83 schon ziemlich nahe an $\frac{5}{6}$ hinreicht, in gar vielen Fällen, wenn etwa $\frac{83}{100}$ allein vorkommt, für denselben gewiß $\frac{5}{6}$ gesezt werden, ohne daß der Ueberschuß von $\frac{1}{300}$ weiter in Anschlag gebracht würde.

Ohne Zweifel wird jedoch $\frac{833}{1000}$ dem wahren Betrag von $\frac{5}{6}$ noch näher liegen. Denn, wenn 1000 in das 3te Glied geschrieben wird, so folgt daraus sicher

$$\frac{5}{6} = \frac{833\frac{1}{3}}{1000}, \text{ d. i. } \left[\frac{833}{1000} + \frac{1}{3000}\right].$$

Die $\frac{1}{3000}$ können gewiß in unzähligen Fällen ganz wegbleiben; hiernach aber

$\frac{833}{1000}$ oder 0,833 wohl $= \frac{5}{6}$

angenommen werden. Wollte man aber noch

weiter

weiter gehen, so würde ohne Zweifel 0,8333 noch größere Schärfe in Näherung geben.

Die beede unendliche Decimalbrüche, welche wir bisher, als Beispiele aufgestellt haben, gehen mit Zifern fort, welche sich gleich bleiben, man mag das Geschäft so weit fortsezen, als man nur will. Andre Decimalbrüche aber haben immer sich ändernde Zifern, wenn man von Stelle zu Stelle (auf kleinere Theilchen zu) fortrükt.

Man nehme zum Exempel vor sich:

$\frac{4}{17} = 0{,}23\ldots$ Denn darauf führen die nächstfolgende Sätze:

$$17 : 4 = 100 : 23\tfrac{9}{17}$$

$$\text{also} = 1 : \frac{23\frac{9}{17}}{100}.$$

Der lezte Bruch ist $= \frac{23}{100} + \frac{9}{1700}$.

Dafür gar oft sich 0,23 ohne Anhang wird sezen lassen.

Kommt in das 3te Glied aber 1000, so folgt daraus: es sei

$$\frac{4}{17} = \frac{235}{1000} + \frac{5}{17000}$$

wo man wieder den lezten Bruch weglassen, und füglich annehmen darf:

$\frac{4}{17}$ sei $0{,}235\ldots$ gleich *) (in Näherung).

*) Man hängt allen Decimalen, welche unendlichen Dec. Brüchen zugehören, einige Tüpfelchen bei, um anzuzeigen, daß die zulezt-geschrei-

Sezt man das Geschäft fort, so kommt man auf 0,23529.. und, wenn man noch größre Schärfe verlangt, auf 0,23529411; womit man den Bruch $\frac{4}{17}$ in acht Decimal-Ziffern ausgedrükt vor sich hat. Aeusserst selten wird diese ausserordentlich-grose Schärfe nöthig seyn; indem meistens drei bis vier Decimalen schon genügen. Indessen muß man dennoch die Art, sich dem wahren Gehalt von $\frac{4}{17}$ (und so jedem andern Bruch) zu nähern, genau kennen.

§. 130. Wer die vorhergehenden drei Blätter mit Aufmerksamkeit durchgegangen hat, wird jezt bald einsehen, worauf sich die mechanische Regel, aus einem gewöhnlichen Bruch einen Decimal-Bruch zu machen gründe, welche in vielen Rechenbüchern steht, und so heißt:

„Hänge an den Zähler des gewöhnlichen „Bruchs Nullen, so viel dir gefällt, „und dividire mit dem Nenner in den „(mit den Nullen vermehrten) Zähler.

Nehmlich je mehrere Nullen man anhängt, um so grösre Schärfe erhält man, oder um so viel mehr Decimal-Zifern erhält man (im Quotienten).

Z. B.

schriebene Zifer nicht schlechterdings die lezte sei, sondern daß man auch noch für niedrigere Stellen Zifern berechnen könne, wenn deren Beifügung erforderlich seyn sollte.

Z. B. Anstatt $\frac{4}{17}$ schreibe $\frac{4,00}{17}$:

Die Division giebt 0,23 . . wo man den Rest wegläßt.

$\frac{4,000}{17}$ giebt 0,235 . . also den Bruch in dre Decimalen.

Eben so, wenn der Decimal-Ausdruk für $\frac{1}{7}$ verlangt würde, so schreibe so:

$\frac{1,00}{7}$; giebt 0,14 . . in zwei Decimalen,

$\frac{1,000}{7}$; giebt 0,142 . . in drei D.

$\frac{1,0000}{7}$; giebt 0,1428 . . in vier D.

Daß dieses mechanische Verfahren richtig sei, wird jeder begreifen, der die Proportionen sich denkt:

$$7 : 1 = 100 : 14 + \frac{2}{7}$$
$$\text{also auch} = 1 : \frac{14}{100} + \frac{2}{700}$$

wo, mit Weglassung des lezten Bruchs, $\frac{14}{100}$ oder 0,14 erscheinet. Gleichförmig gelangt man auf 0,142 . . wenn 1000 in das 3te Glied eingesezt worden.

Niemand wird in Abrede stellen können, daß man durch Aufstellung der Proportionen ganz evident den Weg sieht, auf welchem man zu dem Decimalausdruk des vorgegebenen Bruchs gelangt, zugleich mit der Rechtmäsigkeit eines jeden Schritts, welcher dazu führt.

Diesen Weg und diese Rechtmäsigkeit sieht aber der angehende Decimal-Rechner gewiß

nicht mit Ueberzeugung ein, wenn man ihm blos vorschreibt:

„Hänge Nullen an den Zähler, und dividire „alsdenn mit dem Nenner.

Wer die Gründe der Methode einmal richtig gefaßt hat, der mag allerdings in vorkommenden Fällen schlechthin oder direct die mechanische Regel befolgen, und darnach die verlangten Decimalen suchen. Die gemachte Anmerkung geht blos die erste gründliche Einsicht an.

§. 131. Viele Arithmetiker, zumal solche, denen Geometrie fremd ist, stosen sich an dem Ausdruk:

unendlich

und schrecken dafür gleichsam zurük.

Allein, was ohne Ende fortgeht, oder doch fortgehen kann, das darf man doch wohl unendlich nennen. Nun ist aber gezeigt, wie die Decimalbrüche

für $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$

für $\frac{5}{6} = 0{,}83333\ldots$

(wie auch die übrige angeführte) auf immer weiter hinausgehende Decimal-Stellen erstrekt werden können, weil man ja in das 3te Glied der angeführten Proportionen jede Potenz von 10 setzen kann, und dabei weder auf eine Million noch auf eine Billion eingeschränkt ist,

ist, unmittelbar daraus aber auf Decimal-Zifern, die sich in keine Anzahl einschränken lassen, folgern darf.

Es kann demnach keine rechtmäsige Bedenklichkeit dem angenommenen Ausdruk: unendlich entgegen stehen. Das Daseyn einer unendlichen Progression ist auch gar nicht zu leugnen, (progressus infinitus), man mag ein Beispiel vor die Hand nehmen, welches man will.

Z. E. bei $\frac{1}{7}$ denke man 0,142.. Dafür kann man ausgesezt hinstellen:

$$\frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000}.$$

Die Renner lauffen hier in einer geometrischen Progression fort; man kann sie sich denken, als

$$10^1;\quad 10^2;\quad 10^3.$$

Aber damit ist die Progression noch lange nicht geendigt. In schärferer Näherung ist $\frac{1}{7}$ ja als 0,1428.. anzusehen; und in noch schärferer, 0,14285.. wo die Reihe der Renner schon bis auf die fünfte Potenz von 10 fortrükt. Aber, wer mag hindern, daß man sie noch weiter fortsetze? Kein Glied ist das lezte, über das hinaus man kein neues sezen könnte; weil es immer höhere Potenzen von 10 giebt, als jede angegebene, sie sei für sich auch noch so hoch angenommen. Kaum mag sie jemand aussprechen, so wird man ihm die nächst grösere noch weiter dazu aussprechen können. Folglich

lich kann man auch ohne Ende fort Decimalen aufstellen, wodurch sich dann der Ausdruk: unendlicher Decimalbruch, wohl sicher zum Ueberfluß rechtfertigen wird.

§. 132. Was kann man aber nun mit diesen unendlichen Decimalbrüchen anfangen? wie kann man sie in der Vermischung mit endlichen benützen? — Diese Fragen sollen nunmehr sogleich beantwortet werden; die vollständige Benützung läßt sich aber auf ein paar Blättern gar nicht zusammen gedrängt vortragen.

Was zuerst hiebei in den Weg kommt, ist der Vortheil bei Additionen:

Zwei gewöhnliche Brüche, welche addirt werden sollen, müssen zuvörderst unter einen Nenner gebracht werden; und erst nach dieser Reduction ist Summation möglich (S. in §. 42 zurük). Hat man aber Decimalbrüche, so können dieselbe allemal unmittelbar addirt werden.

z. B. $\frac{4}{17} = 0{,}235..$

$+ \frac{3}{4} = 0{,}75.$

$(67:68) = 0{,}985..$

Daß diese Summe der 2 Brüche $\frac{67}{68}$ befrage, erfährt man erst, wenn man sich $\frac{16+51}{4.17}$ formirt hat, und alsdenn die 2 Factoren im Nenner multiplicirt, und die zwei Zähler addirt.

dirt. Die Addition der Decimalen hingegen geht direct vor sich. Zehntheilchen werden unter Zehntheilchen gestellt, Hunderttheilchen unter Hunderttheilchen, und so fort. Anstatt: 0,75 hätte man auch 0,750 schreiben können; (den Erinnerungen des §. 126 gemäs); damit auch die Stelle der Tausendtheilchen oben und unten doch mit einer Zifer besezt worden wäre. In der Summation selbst würde damit nichts geändert worden seyn, wie in die Augen fällt.

Daß man die Decimalen rechtmäsiger Weise so direct addirt habe, ergiebt sich aus der Betrachtung, daß die Decimalbrüche

$$\left.\begin{matrix} 0{,}235 \\ +\,0{,}750 \end{matrix}\right\} \text{ sich als } \frac{235}{1000} + \frac{750}{1000}$$

ansehen lassen, also als Brüche, welche einen Renner haben, deren Zähler also ohne Anstand sogleich in eine Summe gebracht werden können, ganz wie die Deduction in §. 42 es als vernünftig erweist.

Auch kann sich jeder durch die Probe überzeugen: er verwandle einmal den gewöhnlichgeschriebenen Bruch $\frac{67}{68}$ in einen Decimalbruch:

$$\begin{aligned} 68 : 67 &= 1000 : 985 \\ \text{also auch} &= 1 : \tfrac{985}{1000}. \end{aligned}$$

Das lezte Glied ist offenbar eben die oben in der Summation erhaltene Grösе: 0,985.

Die

Die hiemit schon wohl ersichtliche Vortheile nehmen mit der Anzahl der zu addirenden Brüche zu. Denn drei gewöhnliche Brüche mit 3 verschiedenen Nennern unter eine Benennung zu bringen, ist schon ein ziemlich beschwerliches Geschäft; und es wird noch beschwerlicher, wenn es vier sind. Auch wird man dadurch meistens nothwendig auf Brüche hineingeführt, deren Nenner über 100 steigen, und welche, für sich genommen, alsdenn dazu erst selten wirklich brauchbar sind, sondern erst wieder auf verständliche kleinere Brüche reducirt werden müssen.

Man nehme das Beispiel einmal, wie folgt:

$$\begin{array}{rl} \frac{4}{17} & = 0,235\ldots \\ \frac{3}{4} & = 0,750\ldots \\ \frac{1}{7} & = 0,142\ldots \\ \hline (537:476) & = 1,127\ldots \end{array}$$

Die vorgelegte drei Brüche zu addiren, erfordert Zeit und Mühe, welche mit der nicht zu vergleichen ist, die man bei den Decimalen anzuwenden braucht, um die Summe 1,127.. zu erhalten. Ueberdem aber ist der Bruch $\frac{537}{476}$ für sich genommen, nicht einmal in der Anwendung brauchbar. Man muß erst daraus machen:

$$(1+\tfrac{61}{476})$$

und alsdenn erst wieder erörtern, wo hin dann $\frac{61}{476}$ falle? Insoferne man nun herausbringt,

der

der Bruch: $\frac{61}{488}$, wäre rein $\frac{1}{8}$ gleich, so erkennt man dann wohl, daß $\frac{61}{476}$ etwas mehr im Gehalt betragen müsse, weil der Nenner oder der Divisor 476 kleiner ist, als 488; und ein kleinrer Divisor immer einen größern Quotienten giebt.

Wer hingegen Kenntnis von Decimalen hat, und die Summe 1,127 vor sich bekommt, der sieht sogleich ein, daß der Betrag dieser Summe $= (1 + \frac{1}{8})$ mit einem kleinen Ueberschuß sei. Denn, wenn er sich nur etwas in Decimal-Rechnung geübt hat, so ist ihm ganz gewiß der Decimalausdruk von $\frac{1}{8}$ mit 0,125 schon oft vorgekommen. So bald sein Auge 1,127 sieht, so schließt er unmittelbar: Die Summe dieser vorgelegten Brüche schiest blos um 2 Tausendtheilchen über $1\frac{1}{8}$. Denn das läßt sich doch gewiß im Kopf zusammen rechnen:

1,125
0,002
1,127

Den Betrag von 2 Tausendtheilchen wird man aber in unzähligen Fällen gar nicht achten; sondern mit dem Gehalt $1\frac{1}{8}$ zufrieden seyn, und daraufhin seine Schluß-Angaben bestimmen.

Uebrigens muß doch hiebei noch folgendes bemerkt werden: Da die Decimalen für $\frac{4}{17}$, bis

auf

auf die 4te Stelle erstrekt, 0,2352 heissen, und die für $\frac{1}{7}$ eben so weit erstrekt, 0,1428 heissen: so folgt daraus, daß die Summe der drei vorgelegten Brüche, genauer genommen 1,1280 und nicht 1,127 betrage. Denn die drei Decimalbrüche,

0,2352
0,7500
0,1428

geben: 1,1280

woraus ersichtlich wird, daß der Ueberschuß über 1,125 (scharf genommen) nicht blos $\frac{2}{1000}$, sondern $\frac{3}{1000}$ beträge.

Die Genauigkeit in dem Auswurf der Summe nimmt diesemnach zu, in jemehr Decimalen man die einzelnen Brüche, welche addirt werden sollen, schon berechnet vor sich hat, und so bei der Addition benüzt. Aber diese Genauigkeit ist gar nicht immer so weit zu treiben nothwendig, weil die Irrung über ein Tausendtheilchen sehr selten von bedeutendem Interesse, oder einiger Bestreitung werth ist.

Wer gar keine Decimal-Rechnung versteht, und etwa gefragt würde: um wie viel Tausendtheilchen reicht der Bruch $\frac{61}{476}$ über $\frac{1}{8}$? würde übrigens gewiß weit mehr Mühehaben, um die Bestimmung zu geben: „er reicht nicht blos 2, sondern 3 Tausendtheilchen drüber!“ — Diese Behauptung wird doch wohl jezt jeder Unbefangene, der die lezten drei Blätter gelesen hat,

hat, zugestehen, und auch die Gründe hievon nunmehr (wie ich denke) hinreichend einsehen. Weiter hinein wollen wir hier nicht gehen.

§. 133. Einem Einwurf, welchen vielleicht viele Rechner, ehe sie in die Helfte des vorh. Ephens gekommen sind, stillschweigend gemacht haben, werde ich gegenwärtig wohl am füglichsten begegnen:

„Die Addition mehrerer Decimalbrüche „geht freilich leicht von statten (werden sie spre„chen), man hat die Mühe nicht, wie bei der „Reduction gewöhnlicher Brüche; aber man„muß doch vorher eben die gewöhnliche Brüche „in Decimalen ausgedrükt kennen; und also „das Geschäft der Umbildung in den zehntheili„gen Ausdruk übernehmen, ehe die Addition „selbst anfangen kann. Dieses Vorbereitungs„Geschäft erfordert eine besondre Rechnung; „also auch besondern Zeit-Aufwand, welche „das Lob der Kürze bei dieser Methode sehr „zweifelhaft macht."

Dieser Einwurf würde von grosem Belang seyn, wenn der, welcher Decimal-Rechnung lernte, immer ein Anfänger bliebe. Nehmlich eine Uebung von wenigen Tagen führt jeden, der mit Decimalen rechnet, auf etliche Duzend Decimal-Ausdrücke, welche allzuoft vorkommen, als daß sich ihre Darstellung nicht jedem Gedächtnis einprägen sollte. Die Be-

deutung der Brüche 0,5 für $\frac{1}{2}$; 0,25 für $\frac{1}{4}$; 0,75 für $\frac{3}{4}$; 0,3333... für $\frac{1}{3}$; alsdenn die Vielfachen dieser Brüche, und deren Helften, wie 0,6666.. für $\frac{2}{3}$; und 0,1666... für $\frac{1}{6}$; desgleichen 0,08333 für $\frac{1}{12}$; und 0,04166 für $\frac{1}{24}$. Diese Decimalbrüche muß einer, der diese Methode zu rechnen benüzt, schlechterdings ins Gedächtnis fassen, und, wenn er auch das schwächste Gedächtnis hätte, behalten, weil ihre Wiederholungen bei unzähligen Rechnungen-Vorfällen häuffiger sich einstellen, als sich nur angeben läßt.

Sollte aber jemand seinen Erinnerungskräften gar sehr wenig zuzutrauen Ursache haben, so wird dieser es doch wohl nicht für allzubeschwerlich finden, ein einziges Quartblatt Papier mit drei bis vier Duzend Decimal-Ausrücken anzufüllen, welche die wichtigsten und am häufigsten vorkommende Brüche angehen.

Entweder schreibe derselbe sich eine Reihe von Brüchen nach folgender Ordnung:

$\frac{1}{2}$	ist 0,5.	$\frac{1}{11}$	ist 0,09090..
$\frac{1}{3}$	.. 0,333..	$\frac{1}{12}$	.. 0,08333..
$\frac{1}{4}$	.. 0,25.	$\frac{1}{13}$	.. 0,07692..
$\frac{1}{5}$	.. 0,2.	$\frac{1}{14}$	.. 0,07142..
$\frac{1}{6}$	.. 0,1666..	$\frac{1}{15}$	.. 0,06666..
$\frac{1}{7}$	.. 0,1428	$\frac{1}{16}$	.. 0,0625.
$\frac{1}{8}$	.. 0,125.	$\frac{1}{17}$	.. 0,05882..
$\frac{1}{9}$	.. 0,1111..	$\frac{1}{18}$	.. 0,05555..
$\frac{1}{10}$	.. 0,1.	$\frac{1}{19}$	.. 0,05263

welche

welche Reihe nach Willkühr fortgesezt werden kann;

Oder er formire sich eine Tabelle der bestimmten Brüche von 1 bis 60, und dazu eine 1 bis 64. Die Brauchbarkeit derselben erstrekt sich ausserordentlich weit;

Die erste für Rechnungen, wo Gulden und Kreuzer vorkommen;

Die zweite für Rechnungen, wo Gewichte, und Unterabtheilungen von Fruchtmaasen vorkommen.

Die für Kreuzer wird, wie hier steht, anfangen

$\frac{1}{60}$ ist 0,01666..
$\frac{2}{60}$ .. 0,03333..
$\frac{3}{60}$ .. 0,05.
$\frac{4}{60}$ .. 0,06666..
$\frac{5}{60}$ .. 0,08333..
$\frac{6}{60}$ .. 0,1.
$\frac{7}{60}$ .. 0,11666..
$\frac{8}{60}$ .. 0,13333..
$\frac{9}{60}$ .. 0,15.
$\frac{10}{60}$ .. 0,16666..

Die für Gewichte und Maasen, wie hier steht:

$\frac{1}{64}$ ist 0,015625.
$\frac{2}{64}$ .. 0,03125.
$\frac{3}{64}$ .. 0,046875.
$\frac{4}{64}$ .. 0,0625.
$\frac{5}{64}$ .. 0,078125.
$\frac{6}{64}$ .. 0,09375.
$\frac{7}{64}$ .. 0,109375.
$\frac{8}{64}$ .. 0,125.
$\frac{9}{64}$ .. 0,140625.
$\frac{10}{64}$ .. 0,15625.

Werden beede Reihen gehörig fortgesezt, die eine bis auf $\frac{59}{60} = 0,98333..$ die andre bis auf $\frac{63}{64} = 0,984375.$ so wird man damit die

allermeisten Decimal-Brüche *) in eine kurze Uebersicht zusammen bekommen, welche in Rechnungen am häufigsten sich einstellen. Der grose Nutzen dieser Uebersicht wird sehr bald von jedem zur Genüge eingesehen werden, der etwa nur vollends die nächsten drei Blätter aufmerksam durchzugehen, die Geduld haben mag.

Hier stehe blos noch folgendes Beispiel: es sei zu addiren:

$5\frac{13}{20}$ Gulden.	Man schreibe im	5,65.
$4\frac{4}{15}$ Gulden.	Decimal-Aus-	4,2666..
$1\frac{7}{60}$ Gulden.	druk:	1,1166..
$11\frac{1}{30}$ Gulden ist so viel, als:		11,0332..

oder 11 Gulden, 2 Kreuzer.

Wer die Tabelle schon ganz berechnet hat, wird hier nehmlich sogleich bei $5\frac{13}{20}$ unter oder neben $\frac{39}{60}$ nachsehen, und dabei den Decimalausdruk 0,65 finden. Denn $\frac{13}{20}$ ist doch gewiß $\frac{3 \cdot 13}{3 \cdot 20}$ oder $\frac{39}{60}$ gleich. Eben so wird er den Ausdruk für $\frac{4}{15}$ oder $\frac{16}{60}$ finden, und einschreiben können; desgleichen für $\frac{7}{60}$. Die Summation giebt 11,033 **). Also 10 Ganze (Gulden) und

*) In dieser Reihe erhält man zugleich die meisten Ausdrücke der 11 Brüche von $\frac{1}{12}$ bis $\frac{12}{12}$, welche man jedoch auch für sich herausschreiben kann: $\frac{1}{12}$ ist $= 0{,}08333..$
$\frac{2}{12}$ ist $= 0{,}16666...$ u. s. w.

**) Daß unter dem Strich 0,0332.. steht, und nicht 0,0333.. kommt daher, weil die obern 2 Brüche nicht auf eine weitre Stelle hinaus angegeben stehen.

und 0,033.. dazu, d. i. einen Bruch von einem Gulden, welcher (dem Anfang der angerathenen Tabelle gemäs) so viel, als $\frac{2}{60}$ oder $\frac{1}{30}$, d. i. zwei Kreuzer, beträgt.

Der Verfolg dieser angezeigten Vortheile, und die Art, wie sie sich noch viel weiter ausdehnen lassen, wird weiter unten vorkommen.

§. 134. Eine Bemerkung kann hier nicht wohl länger hinaus gesezt werden, welche die Addition vollendeter und unendlicher Decimalbrüche, wenn sie vermischt, oder wenn die leztern allein stehen, und eine Summe zusammen ausgeben sollen, betrifft. Es kann sich öfters ereignen, daß in der Addition Decimalen vorkommen, welche in 9 fortlauffen, und das Daseyn eines unendlichen Decimalbruchs wohl anzeigen, aber in einen vollendeten sogleich umgebildet werden müssen.

$\frac{1}{6}$ ist 0,16666..
$\frac{1}{12}$ ist 0,08333..
Summe: $\frac{3}{12}$ = 0,24999..

Unleugbar ist $\frac{3}{12}$ so viel als $\frac{1}{4}$; und also im Decimal-Ausdruk 0,25. gleich. Hier gab die Addition der Decimalen 0,24999..

Dieses Resultat wird niemand befremden, der bedenkt, daß die Decimal-Ausdrücke für $\frac{1}{6}$ und für $\frac{1}{12}$ keine ganz vollendete Ziffern enthalten, daß immer ein kleiner, wenn auch gleich

ein äusserst kleiner Theil an 0,1666.. sowohl als an 0,08333.. noch fehle, welchen eben die angehängten Tüpfelchen (der Anmerkung in §. 130 gemäs) andeuten, und daß daher auch in der Summe blos ein unendlicher Decimalbruch (unter dem Strich) hervorgehen könne. Allein dem Erfolg des mechanischen Calküls läßt sich sehr leicht nachhelfen. So oft dergleichen fortgehende Neuner vorkommen, darf man allemal sicher ein Tausendtheilchen oder ein Zehntausendtheilchen... zu dem allerhintersten addiren, so wird man den vollendeten Decimalbruch, welcher in die Rechnung wirklich gehört, ohne Fehler erhalten. So ist in dem Beispiel ohne Zweifel

0,24999
+ 0,00001

in der Summe: 0,25000, d. i. 0,25; den Bemerk. in §. 123 gemäs.

Eben daher ist allemal

0,19999... für 0,2.
0,29999... für 0,3.
0,89999... für 0,9.
und 0,9999... für 1 selbst

zu nehmen.

Diese Anmerkung ist sehr genau zu behalten. Denn dergleichen Ergänzungen sind unzählig oft nothwendig, und nicht blos, wenn Decimalen addirt werden, sondern auch bei Sub-

Subtrac tionen, bei Divisionen.... überall anzubringen, so oft nur fortlaufende Neuner sich zeigen.

§. 135. Die Belehrung mit Decimalen zu subtrahiren, kann nunmehr ganz kurz ausfallen:

Gesezt es wäre $\frac{1}{20}$ von $\frac{1}{16}$ abzuziehen, so schreibe man:

$\frac{1}{16}$ ist 0,0625
$\frac{1}{20}$ ist 0,05

Die Differ. 0,0125. Das ist $= \frac{1}{80}$.

Daß die Differenz 0,0125 so viel, als der gewöhnliche Bruch $\frac{1}{80}$ betrage, sieht jeder ohne specielle Ausrechnung schon ein, wenn er blos der Bedeutung des Bruchs $0,125 = \frac{1}{8}$, (welcher jedem Anfänger wohl in der ersten Stunde schon vorkommt) sich erinnert. Denn ohne Zweifel ist (nach §. 121.) 0,0125 eine zehnmal kleinre Gröse, als 0,125. Bedeutet also 0,125 so viel, als $\frac{1}{8}$, so muß natürlich $0,0125 = \frac{1}{80}$ gelten.

Uebrigens hätte 0,05. der obenstehende Subtrahend auch 0,0500 geschrieben werden können. (nach §. 123) Diesen Zusaz mit Nullen muß der Anfänger allemal hinzuschreiben, oder doch hinzudenken, wenn dergleichen volendete Decimalbrüche in der Stelle des Minuends (oben) stehen; der Subtrahend aber

mehrere Decimalzifern in den hintern Stellen hat. Z. B. wenn vorgegeben würde:

$\frac{1}{2} = 0{,}5.$

$\frac{1}{32} = 0{,}03125.$

so bleibt $\frac{7}{32} = 0{,}40875.$

Wer hier anstatt 0,5. sich 0,50000. denkt, wird gewiß nicht die mindeste Schwürigkeit finden, die Differenz auf die angezeigte Weise herauszubringen.

Eben so verhält sichs, wenn unendliche Decimalbrüche als Subtrahenden stehen. Z. B. man schreibt

$\frac{3}{4} = 0{,}75$

$\frac{7}{60} = 0{,}11666...$

giebt aus; $\frac{19}{30} = 0{,}63333..$

Hier muß man sich den Minuend 0,75 als 0,75000 denken, ja selbst mit noch mehr Nullen versehen, weil sich auch der Decimal-Ausdruk für $\frac{7}{60}$ nicht blos, als 0,11666, sondern, als 0,116666.. und selbst mit noch mehrern Decimalen fortgesezt denken läßt. Diese Erstreckung auf niedrigere Stellen ist Ursache, daß man in die Differenz nicht 0,63334 sezt, sondern 0,63333; indem die senkrecht über ..66.. stehende Null-Zifern alle, als.... 99, anzusehen sind; eben so, wie in der gewöhnlichen Subtraction bei ganzen Zahlen alle Nullen, welche im Minuend neben einander stehen, bis

auf

auf die allerlezte, als Neuner angesehen werden. Bei diesen Decimalen ist aber keine die absolut-lezte, weil keine ...66.. im Subtrahenden die absolut-lezten Zifern sind.

Wem diese Vorstellungs-Art etwa nicht ganz gefallen möchte, der fasse das Verfahren so:

So oft ein unendlicher Decimalbruch als Subtrahend vorkommt, so bilde er den vollendeten, der als Minuend vorgegeben ist, in einen unendlichen Decimalbruch selbst um *); so kann er direct bis auf die lezte Zifer hinaus verfahren. Nehmlich, er schreibe anstatt 0,75. in dem Beispiel der vorh. Seite ein: 0,74999.. so wird er den Subtrahenden Zifer für Zifer von den drüberstehenden Zifern in Abzug bringen können.

Folgendes Beispiel wird wohl die Anwendung dieses Raths vollends offen darlegen:

$\frac{2}{5} - \frac{2}{9}$ ist so viel, als [0,4. — 0,2222..]

Man schreibe: $\frac{2}{5}$ = 0,39999..

$\frac{2}{9}$ = 0,22223..

Differenz: $\frac{8}{45}$ = 0,17777..

Durch diese Umbildung wird in der That der Minuend dem Subtrahenden gleichartig gemacht; Reduction auf Gleichartigkeit aber muß jeder Subtraction, die möglich seyn soll,

*) Dem Innhalt des §. 134 gemäs, geht dieses allemal an.

vorhergehen. Man vergleiche, was oben §. 42 bis 44 hierüber erinnert worden.

§. 136. Wie mit Decimalen zu multiplíciren und zu dividiren sei, muß nunmehr gezeigt werden. Aus wohl überdachten Gründen nehme ich sogleich eine Division vor; Indem das Verfahren dabei gezeigt wird, wird es sich schicken, zugleich die einfachsten Fälle, in welchen mit Decimalen zu multipliciren gefordert wird, zu beleuchten:

Der leichteste Divisions-Fall ist der, wenn der Dividend eine ganze Zahl mit einem angehängten Decimalbruch, der Divisor aber schlechthin eine ganze Zahl ist.

Z. B. $\frac{48,75}{3}$ giebt 16,25. Man erhält diesen Quotienten, indem man durchaus auf die gewöhnliche Weise verfährt, wie bei ganzen Zahlen, und blos auf das Strichlein, wo die Decimalen anfangen, wohl merkt. Das Verfahren hat gar keine Schwierigkeit:

3	48,75	16,25.
	3	
	18	
	18	
	0,7	
	0,6	
	0,15	
	0,15	
	0	

Das

Das Divisions-Verfahren ohne Decimalen erforderte bei diesem Fall wirklich ein etwas längeres Geschäft:

$(48\frac{3}{4}):3$ ist vorgelegt. Da muß man zuerst die Reduction unter einen Nenner berichtigen; also berechnen:

$$\frac{192+3}{4}:3, \text{ d. i. } \frac{195}{4.3} = \frac{195}{12}.$$

Die wirkliche Division giebt nun $16\frac{3}{12}$ aus, welches eben $16\frac{1}{4}$, oder 16,25. beträgt.

Daß man übrigens bei der Operation mit den Decimalen selbst, da, wo man zuerst im Dividiren auf sie stößt, (bei 0,7.) zunächst drunter nicht 6 allein, sondern 0,6 setzen müsse, läßt sich wohl bald einsehen.

Erstlich liesse sich von 0,7. die ganze Zahl 6 gar nicht abziehen.

Zweitens ist dabei so zu denken: 3 mit 0,2. multiplicirt muß so viel, als $3.\frac{2}{10}$ betragen; das ist aber $\frac{6}{10}$ gleich, und im Decimal-Ausdruk daher nothwendig 0,6. zu schreiben seyn.

Damit hat man bereits Anlaß, zu bemerken, wie die Multiplicationen ausfallen, wenn Decimalen unter den Factoren vorkommen.

Der vorgekommene Fall gehört freilich unter die einfachsten. Man kann aber sogleich davon auf den nächsten, der sich an diesen anschliest, folgern:

0,2 oder 3 Daher 0,02. } Factoren.
3,0 0,2 3

Product 0 6. 0,6. Prod. 0,06.

Nehmlich 0,02 ist so viel, als $\frac{2}{100}$. Nun wird gewiß niemand leugnen, daß das Product

$\frac{2}{100} \cdot 3 = \frac{6}{100}$ sei; das ist aber

so viel, als 0,06.

Die lezte Zifer des Quot. in unserm Divisions-Exempel ist: 0,05. Diese, mit 3 multiplicirt, giebt 0,15. Denn 0,05 ist $= \frac{5}{100}$ und $\frac{5}{100} \cdot 3$ ist eben 0,15.

Man sieht ein, daß es damit, wie mit (0,2).(3) beschaffen sei, nur daß das Product bei (0,05).(3) zwei Zifern giebt, von welchen die eine in die Stelle der Zehntheilchen einrüken muß.

Folgende Zusammenstellung wird in Hinsicht auf die lezte Bemerkung nicht überflüssig seyn:

0,5	0,05	0,005
3	3	3
1,5.	0,15.	0,015.

Damit sieht man deutlich, wie die Decimal-Zifern im Product gestellt werden müssen, wie sie rücken, und was untereinander gehöre. Man vergleiche damit noch weiter folgende kurze Sätze:

4,5	0,45	0,045.
3.	3.	3
13,5	1,35	0,135.

Daß die Bezeichnungen richtig seien, ergiebt sich deutlich, wenn man die Factoren so sezt:

$(4\frac{1}{2}) \cdot 3 = \frac{9 \cdot 3}{2}$, d. i. $13\frac{1}{2}$ od. 13,5.

Ferner ist $\frac{45}{100} \cdot 3 = \frac{135}{100}$, d. i. 1,35.

Und endlich $\frac{45}{1000} \cdot 3 = \frac{135}{1000}$, d. i. 0,135.

§. 137. Das vorhergehende Divisions-Exempel werde etwas geändert (im Dividend) angenommen: (47,75):3 werde vorgelegt: Da ist das Verfahren folgendes:

```
3 | 47,75 | 15,9166....
    3
   17
   15
   ---
    2,7
    2,7
   ---
    0,05
    0,03
   ----
    0,020
    0,018
   -----
    0,0020.
```

Hier laßt uns zuerst bemerken, wie die Factoren (0,9).(3) das Product 2,7 geben. Es ist der Fall, wie bei (0,5).(3), welche Factoren

ren das Product 1,5 ausgeben. Man sehe die Zusammenstellung auf der nächstvorhergehenden Seite nach.

Darauf kommt die Multiplication 3.(0,01), welche 0,03 giebt; wodurch hiernächst der Rest 0,02. veranlaßt wird. Da nun oben im Dividend die Zifern mit ...75 sich endigen, so möchte es scheinen, man habe nunmehr auch mit dem Divisions-Verfahren alles erschöpft; und hätte dieserhalb den Quotienten:

$$(15{,}91 + \tfrac{0{,}02}{3})$$

An sich ist der Betrag des Quotienten auch wirklich weder mehr noch weniger, als eben hie zwischen den zwei Klammern steht. Allein, da wären Ganze mit angehängten Decimalen, und alsdenn erst wieder ein Rest in der Form gewöhnlicher Brüche. Diese zusammengesezte Ausdrücke haben etwas beschwerliches und anstößiges an sich, welches sich wohl umgehen läßt. Man denke sich den Dividend 47,75 einmal so, 47,7500. Gewiß ist diese Umbildung gar wohl erlaubt. Sie ist in §. 123 gerechtfertigt. Nimmt man dieselbe nun an, so folgt daraus, daß der Quotient 15,91.. sich fortsetzen lasse, wie in dem Beispiel selbst angezeigt steht, bis auf ...66..; oder allgemein zu sprechen, bis auf Decimal-Zifern, welche immer in gleichen Figuren wieder hervorgehen, so daß man eben dadurch genau den Decimal-Bruch vor sich bekommt, welchen man bestimmt nöthig hat, um

angeben zu können, was für ein Bruch an den ganzen Zahlen des Quotienten hängt; 0,9166... ist dem Bruch $\frac{11}{12}$ gleich, welches jeder Decimal-Rechner weis, der etliche Wochen sich in diese Methode geübt hat, und noch früher jeder, der sich die oben vorgeschlagene Tabelle von $\frac{1}{12}$ oder auch von $\frac{1}{24}$ an gefertiget hat.

Würde man in dem vorgelegten Divisions-Exempel blos bis 15,91.. fortgerechnet haben, so ist sehr klar, daß die Einsicht, $\frac{11}{12}$ hänge den Ganzen (15) des Quotienten an, damit noch im Dunkeln geblieben wäre, und daß etwa blos eine entfernter-gelegene Vermuthung einen oder den andern darauf hin dürfte geleitet haben, dieser Bruch sei über die 15 Ganze noch vorhanden. Nachdem allen wird es jedoch nüzlich seyn, über den angeführten Rest: $\frac{2}{3}$ noch folgendes in Erwägung zu nehmen:

$\frac{2}{3}$ ist = 0,6666... im Decimalausdruk.

Darüber ist wohl hinlängliche Erläuterung in §. 128 oben vorgekommen:

Nun denke man den Zähler so: $\frac{0,2}{3}$. Eben so viel ist ganz unleugbar $(\frac{2}{10} : 3)$ oder $\frac{2}{10.3}$, d. i. $\frac{2}{30}$. In Decimalen ist $\frac{2}{30}$ = 0,06666.. Man kennt daher die Reduction des Bruchs $\frac{0,2}{3}$ blos auf Decimalen.

Gleichförmig wird $\frac{0,02}{3}$ = 0,006666.. seyn. Denn $(\frac{2}{100} : 3)$ ist gewiß = $\frac{2}{300}$; und

daraus folgen eben die eben angeführte Decimalen.

Ist dem nun also, so wird

$[15{,}91 + \frac{0{,}02}{3}]$ so viel, als $[15{,}91 + 0{,}00666..]$ betragen. Kürzer zusammen gezogen kommt damit 15,91666.. zum Vorschein; das ist aber eben der Quotient, welchen wir oben in dem ausgesezten Divisions-Exempel erhalten haben. Das gebrauchte Verfahren wird also durch diese Probe selbst aufs vollkommenste bestätiget; und zugleich haben wir durch diese nachgetragene Bemerkung Anlaß bekommen, einzusehen, wie sich alle Dividenden von der Gestalt, wie 0,02, 0,002, behandeln lassen.

$\frac{0{,}2}{3}$ ist = 0,0666..

$\frac{0{,}02}{3}$ ist = 0,00666..

$\frac{0{,}002}{3}$ ist = 0,000666..

Man nehme zur mehrern Uebung hierauf auch andre Fälle:

$\frac{7}{4}$ ist = 1,75; $\frac{0{,}7}{4}$ ist = 0,175

und $\frac{0{,}07}{4}$. Daher: 0,0175.

So sieht man schon, wie die Decimalen von der linken gegen die rechte Hand zu rücken, je nachdem der Zähler beschaffen ist.

§. 138. Wenn der Divisor selbst ein Decimalbruch ist, so hat man sich, wie folgt, zu benehmen:

$\frac{3}{0{,}2}$

$\frac{3}{0,2}$ ist = 15; also eine ganze Zahl. Darüber wird sich niemand wundern, der bedenkt, daß (3 : 02) so viel, als $(3 : \frac{2}{10})$, das ist $3 \cdot \frac{10}{2}$ betrage, und $\frac{30}{2}$ allerdings 15 Ganze ausmache.

Aus eben dem Grund ist $\frac{3}{0,02}$ = 150. Gewiß beträgt ja $3 : \frac{2}{100}$ oder $\frac{300}{2}$ eben so viel.

Hieraus erhellet nun schon so viel, daß man die Regel, welche bei der Division gewöhnlicher Brüche oben in §. 47 mit Ursachen angeführt worden, nur anwenden dürfe, um einzusehen, wie der Quotient jedesmal zu bezifern sei.

Auch, wenn Divisionen vorkommen, in welchen der Divisor und Dividend aus Decimalen bestehen, wird man damit die gehörige Zurechtweisung sich selbst verschaffen können.

$\frac{0,3}{0,2}$ ist = 1,5. Denn $(\frac{3}{10} : \frac{2}{10})$ ist gewiß so viel, als $\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{2}$, d. i. $\frac{3}{2}$ oder 1,5.

Daher sich dann ergiebt, daß der Bruch $\frac{0,03}{0,2}$ in Decimalen ohne Bruch-Gestalt 0,15 zu schreiben sei; und ebendeshalb $\frac{0,003}{0,2}$ = 0,015, das ist $\frac{15}{1000}$ oder $\frac{3}{200}$ betrage.

Lehrreicher, als der weitläufigste Unterricht mit Worten und speciellen Vorschriften scheint mir folgende Zusammenstellung zu seyn:

$\frac{0,04}{5}$ ist = 0,008. Aber gleich so v. ist $\frac{0,004}{0,5}$

$\frac{0,4}{5}$ ist = 0,08. Aber gleich so v. ist $\frac{0,04}{0,5}$

$\frac{4}{5}$ ist = 0,8. Aber gleich so v. ist $\frac{0,4}{0,5}$

$\frac{4}{0,5}$ ist = 8. Da kommt man in d. Reihe eben } auf $\frac{4}{0,5}$

$\frac{4}{0,05}$ ist = 80. Eben so: = $\frac{4}{0,005}$.

Man verfolge hier nur aufmerksam die Fortrückung der Decimal-Zifern von Stelle zu Stelle; und gebe sich die Rechtfertigung selbst mittelst Construction gewöhnlicher Brüche, so wird man überall die Bedenklichkeiten nach und nach überwinden, welche sich etwa bei schnell aufgeworfenen Fragen über solche Brüche und Divisionen im Anfang eingestellt haben.

Man nehme hiernächst in den Dividend mehr, als blos eine Zifer auf, und mache sich darauf auch mit folgenden Ausdrücken bekannt;

$\frac{0,024}{5}$ ist = 0,0048.

$\frac{0,24}{5}$ ist = 0,048.

$\frac{2,4}{5}$ ist = 0,48. Aber auch $\frac{0,24}{0,5}$

$\frac{2,4}{5}$ ist = 4,8. Aber auch $\frac{0,24}{0,05}$

$\frac{24}{0,5}$ ist = 48. Aber auch $\frac{0,24}{0,005}$

$\frac{24}{0,05}$ ist = 480. Aber auch $\frac{0,24}{0,0005}$.

§. 139. Wer sich diese Beispiele merkt, wird sie als Schemata benützen können, um in jedem vorkommenden Fall, wann mit und in Decimalen dividirt werden soll, sich gehörig

zu

zu benehmen; und auch, wenn der Divisor nicht blos eine Zahl seyn sollte, wird sich dennoch jede Aufgabe auf diese Schemata beziehen lassen:

Z. B. es würde verlangt 5,1 in 4 zu dividiren, oder $\frac{4}{5,1}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln; so würde aus den in Decimalen umgebildeten Brüchen

$\frac{4}{5} = 0,8$; und $\frac{2,4}{5} = 0,48$.

schon abzunehmen seyn, daß der Quotient, der bei der Division (4 : 5,1) in Decimalen verlangt wird, eben die Gestalt haben müsse. Derselbe heißt: 0,784.. Die Stelle, in der die Decimalen anheben, ist also durch die Decimalbrüche 0,8. und 0,48 angezeigt. Daß der Divisor in dem vorgelegten Fall ein Zehntheilchen an 5 angelangt hat, hindert die Benützung des Schema gar nicht, indem die Ziser in der vordern Stelle die Ordnung der Decimal-Zifern im Quotienten bestimmt.

Uebrigens geht das mechanische Verfahren hiebei so von statten: Man denkt sich anstatt (4 : 5,1) den Divisor als 4,0000... und sezt

5,1	4,0000	0,784..
	3,57	
	0,430	
	0,408	
	0,0220	
	0,0204	
	0,0016	

woraus man schon sieht, wie die Decimalen in noch niedrigern Stellen sich heraus bringen lassen, falls grösere Schärfe etwa noch erforderlich wäre.

Würde aber vorgegeben: $\frac{4}{0,51}$ in Decimalen darzustellen, so erhielte man den Quotienten: 7,84; so wie (auf S. 402)

$\frac{4}{5} = 0,8$; aber $\frac{4}{0,5} = 8$.

ausgegeben haben. Man sieht also auch hier wieder, wo im Quottienten die erste Zifer ihren Anfang zu nehmen habe.

Endlich $\frac{4}{0,051}$ ist 78,4 gleich, in dem die Ganze gegen die linke Hand zu vorrücken, wie die Zifern im Divisor gegen die rechte zurükweichen.

Kommen im Dividenden oder Zähler ebenfalls ganze Zahlen mit angehängten Decimalen vor, so leidet dennoch die Vorschrift auch da mit keinen Abbruch. z. B.,

$\frac{4/2}{5/1}$ ist = 0,8235.. wie $\frac{4}{5} = 0,8$

$\frac{4/2}{0,51}$ ist = 8,235.. wie $\frac{4}{0,5} = 8$

$\frac{4/2}{0,051}$ ist = 82,35.. wie $\frac{4}{0,05} = 80$.

Wenn man sich diese vorgelegte Fälle wohl merkt, so wird man schwerlich bei irgend einer Divisions-Aufgabe sich in Verlegenheit befinden. Die Verlegenheit, welche angehende Decimal-Rechner hiebei zu beunruhigen pflegt, geht blos

blos den Anfang der Decimalen an, und sie kann nicht eintreten, oder muß doch in jedem Fall verschwinden, wenn man nur einen Blik in diese vorgelegte Schemata werfen mag, so oft etwa je ein Zweifel über die bestimmte Zeichnung des Strichleins vor den Decimalen sich bei irgend einer Aufgabe einstellen möchte.

§. 140. Wie Multiplicationen, in welchen beede Factoren kurz sind, und nur eine Decimal-Zifer haben, ausfallen, ist oben in §. 136 und 137 gezeigt worden. Wenn aber beede Factoren Zifern mit mehrern Decimalen in sich enthalten, so ist hiebei doch noch besondre Vorsicht anzuwenden; und deshalb etwas weiters zu merken. Man gehe wieder zuvörderst folgende einfache Sätze durch:

(3.0, 2) diese Factoren geben 0,6
(3.0,02) . . . . . 0,06.
(0,3.0,2) geben aber auch 0,06.

Steigt das Product der 2 Factoren über zehn, so kommen in die Stelle der Zehntheilchen, wo gegenwärtig Nullen stehen, noch Zifern aus der Reihe von 1 ... bis 9:

(3. 0,9) geben aus 2,7.
(3.0,09) geben aus 0,27.
(0,3.0,9) geben aber auch 0,27.
Eben so ist (0,3.0,09) = (0,03.0,9.)
Beede Factoren machen 0,027 aus.

Wenn man nur ein wenig nachdenkt, so wird man wohl bald selbst die Gesezlichkeit, welche bei ganzen Zahlen statt findet, auch hier vollkommen wieder erkennen.

(3 . 90) ist = 270; und (30 . 9) ist ebenfalls 270.

Darüber wird jezt kaum nöthig seyn, sich in ausführlicheren Beispielen weiter aufzuhalten. Man gehe daher zu folgenden Factoren-Verbindungen über:

(3,1 . 0,9) geben aus 2,79

(0,31 . 9) und (31 . 0,09) geben aber eben so viel.

Man darf nur gewöhnliche Brüche anwenden, um sich von dieser Uebereinkunft zu überzeugen:

$\frac{31}{10} \cdot \frac{9}{10}$ und $\frac{31}{100} \cdot 9$ und $31 \cdot \frac{9}{100}$ geben allemal nothwendig ein gleiches Product. Es ist $\frac{279}{100}$, welcher Bruch eben im Dec. Ausdruk 2,79 zu bezeichnen ist.

Gleichförmig ist

(3,1 . 2,4) = 7,44; und auch

(31 . 0,24) wie auch (0,31 . 24).

Hier ist also wieder ein Product auf dreierlei Art zum Vorschein gekommen. Auch hievon kann man sich durch Aufsetzung gewöhnlicher Brüche vollkommen überzeugen:

$(\frac{31}{10} \cdot \frac{24}{10})$ ist $(31 \cdot \frac{24}{100})$ gewis gleich; und so auch der Betrag der zwei Factoren $(\frac{31}{100} \cdot 24)$.

Laßt

Laßt uns aber nun auch die Zusammenordnung der Zifern betrachten, wenn man, wie sonst bei Multiplicationen gewöhnlich ist, unter einander hinschreibt:

	3,1	Multiplicand
	2,4	Multiplicator
Da muß man	6,2	
so setzen:	1,2 4	
so ist das Prod:	7,4 4.	

Die Operation bei diesem Multiplications-Geschäft fängt hier nicht, wie bei ganzen Zahlen, mit der hintersten Zifer des Multiplicators (0,4) an; sondern mit der vordersten, (2), welche zur linken Hand steht. Hingegen bezieht man diese vorderste Zahl auf die hinterste im Multiplicand auf 0,1. Man spricht dabei 2 mal 0,1. giebt 0,2. Alsdenn 2 mal 3 giebt 6. Hierauf wird 6 + 0,2 oder 6,2 unter den Strich geschrieben. Die Zifern über dem Strich zeigen an, wo die ganzen, und wo die Zehntheilchen unter dem horizontalen Strich neben einander hingesezt werden müssen.

Hierauf geht die Multiplication von 0,4 mit 0,1 fort. Das Product muß 0,04 betragen. Endlich 0,4. mit 3 multiplicirt, muß 1,2 betragen, *) zusammen geordnet (1,2 + 0,04) wer-

*) Man sehe nur in §. 136, auch in die ersten Sätze unsers gegenwärtigen §. selbst zurük: (0,3. 0,2) gab 0,06; und (3. 0,9) gab 2,7 aus.

werden in Kürze = 1,24 seyn. Ohne Zweifel machen nun (summirt)

(6,2 + 1,24) das Product 7,44

aus. Wer dieser angezeigten Operation Schritt für Schritt folgt, wird sich das Vorrücken von der linken gegen die rechte Hand gar wohl erklären können, nehmlich in der 2ten Zeile unter den ersten horizontalen Strich

stehen: 0,2
alsdenn: 1,24

Weil keine Hunderttheilchen in 6,2 vorkommen, so ist diese Rückung nothwendig, indem ja doch blos Zifern von einer und ebenderselben Ordnung zusammen-genommen werden können, um eine Summe gehörig zu Stand zu bringen, und daher 1 unter 6; und auch 0,2 unter 0,2 vertical hier kommen muß.

Ganz auf eben das Product kommt man, wenn die zwei Factoren so heissen:

0,24
31,00
7,2
0,24
7,44.

Anstatt 31 ist 31,00 gesezt, nur um die Stellen anzudeuten. Die Multiplication fängt alsdenn so an:

30 mal

30 mal 0,04 ist gewiß 1,2 gleich *)
und 30 mal 0,2 ist 6,0 gleich;
zusammen 7,2
Dazu 1 mal 0,24 = 0,24
giebt in der Summe: 7,44
ebendasselbe Product, wie aus (2,4).(3,1).

§. 141. Wer die Erläuterungen über die bisher angeführte Beispiele wohl gefaßt hat, wird keine Schwierigkeiten mehr finden, Multiplicationen aller Gattungen nunmehr vorzunehmen.

Auch, wenn beede Factoren Decimalen, ohne Ganze, enthalten, bleibt es bei eben dem Benehmen:

Z. B. (0,24.0,31) ist im Product: 0,0744. Denn die Sätze sind da:

0,24
0,31
0,072
0,0024
0,0744.

Nehmlich, zuerst denke man sich (0,3.0,04) das Product ist ohne Zweifel 0,012; so wie im Anfang des vor. §. gezeigt worden, daß (0,3.0,09) = 0,027 betrage.

*) Ohne Zweifel ist (3.0,4) = 1,2; und eben so gut auch (30.0,04). Man sehe in die einfachen Sätze im Anfang unsers §. 140 zurük

Siedenn (0,3 . 0,2) ist 0,06. Zusammen genommen aber giebt 0,012 + 0,06 die Summe 0,072 aus.

Hierauf fährt man fort:

(0,01 . 0,04) giebt 0,0004; und
(0,01 . 0,2) giebt 0,002

zusammen 0,0024.

Anfänger müssen allemal so successiv verfahren, wenn sie sicher gehen wollen. Auch werden sie blos, wenn sie die Geduld hierzu haben, und wenn sie sich die einzelne Darstellungen vor Augen hinzeichnen, die Gründe der Abkürzungen einsehen, welche bei praktischen Anwendungen allerdings nothwendig sind. Es ist und bleibt ja ausgemacht, daß nichts mehr gründlicher Erlernung der Arithmetik hinderlich ist, als wenn man gar zu sehr zu Abkürzungen eilt, und wie manche Lehrer es angreiffen, bei jeder Lehre auch in der ersten Stunde damit sogleich bei der Hand ist.

Auch Beispiele, wie die folgende sind, werden nicht ohne Nutzen mit Bedacht noch erwogen werden:

$(\frac{5}{8} . \frac{8}{5})$ ist = 1. In Decimalen multiplicire man:

$\frac{5}{8}$ = 0,625
$\frac{8}{5}$ = 1,6

0,625
0,3750

Product; 1,0000. Das ist eben = 1.

Wenn

Wenn aber zwei unendliche Decimalbrüche, (als Factoren) vorkommen, so kann niemals das Product, das bei gewöhnlichen Brüchen 1 ausgiebt, in den Decimalen vollkommen so viel betragen, sondern blos 0,9999.. auch manchmal 0,9998... auch 0,9997...

Z. B. $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

$\frac{8}{3} = 2{,}666..$

0,750
0,2250
0,02250
0,002250

giebt d. Prod. = 0,99975..

Hier können die Decimalen, die hinter den Tausendtheilchen stehen, nicht mehr...99 seyn, weil der Bruch $\frac{8}{3}$ beim Multiplicirren blos als 2,666.. geschrieben, und so gebraucht worden. Ohne Zweifel hätte man dafür 2,6666... setzen können, und würde alsdenn bei der Addition erhalten haben: 0,999975... und auf ähnliche Weise hätte sich noch grösere Schärfe erlangen lassen, wenn man $\frac{8}{3}$ in noch mehreren Decimalen, als den einen Factor, gebraucht hätte. Daß die Dec. Zifer, 0999.. übrigens für 1 angenommen werden, darüber wird sich wohl niemand wundern, der nur die Blätter in §. 134 mit Aufmerksamkeit noch einmal zu lesen sich entschliessen kann.

§. 142. Der mehrere Gebrauch von Decimalen, welche nach vollführten Multiplicationen als Producte hervorgiengen, führte gar bald auf eine Abkürzungs-Methode, welcher hier doch noch erwähnt werden muß.

Man bemerkte bald, daß der, der nach einem Product von Decimalen fragte, zufrieden sei, wenn man ihm in der Antwort blos eine Decimal-Gröse angeben konnte, deren Zehntheilchen, Hundert- und Tausendtheilchen, vollkommne Richtigkeit hatten; daß man also z. B. die Aufgabe, wie viel beträgt 2,431 mit 0,314 multiplicirt? oft für hinlänglich aufgelöst erachte, wenn das Product = 0763... angegeben würde.

Die vollkommne Multiplication giebt das Product = 0,763334 an; die unvollkommne, aber kürzere, blos 0,7632.. Beede Multiplications-Acte mögen hier neben einander stehen:

2,431	2,431
0,314	0,314
0,7293	0,7293
0,02431	243
9724	96
0,763334	0,7632.

Die lezte Zifer...2, kann hier nicht mehr vollkommen richtig seyn, weil die Columne, welche die Summe giebt, nicht vollkommen rich-

richtig ist; und dieser fehlt etwas, weil man in der abgekürzten Methode mit dem Multiplicator nicht in alle Zifern des Multiplicands mehr wirklich multiplicirt, sondern die kleinern Theilchen des leztern etlichemal zurükläßt.

Es kommt immer darauf an, wie grose Schärfe man in einem bestimmten Calkül verlangt. Ist sie nicht über Tausendtheilchen nöthig, so ist diese Abkürzungs-Methode allerdings von gutem Nutzen. Bei genauen Rechnungen aber muß man sich derselben enthalten. [Sie führt im Lateinischen den Namen: Multiplicatio contracta.]

§. 143. Von der praktischen Anwendung des Decimal-Calküls in bestimmten Fällen sind bisher, um den Zusammenhang der wesentlichen Belehrungen über die Methode selbst nicht zu unterbrechen, blos hie und da einzelne Winke gegeben werden. Die grösten Vortheile, welche zugleich am häufigsten vorkommen, stellen sich bei Divisionen, wenn die Quotienten nicht in ganzen Zahlen ausgehen, ein. Der Rest, der beim gewöhnlichen Verfahren oft ein sehr beschwerlicher Bruch ist, kommt bei Fortsetzung der Division nach der in §. 136 und §. 137 beschriebenen Weise, in Decimalen eben so leicht zum Vorschein, als die vorhergehende Zifern, welche die Zehner, die Hunderte.... des Quotienten anzeigten.

Z. B. oben ist die Frage vorgekommen: (S. 184) wie viel betragen $\frac{4600}{55}$ Gulden?

```
55 | 4600,00 | 83,636..
   | 440     |
    200
    165
    ----
     350
     330
     ---
      200
      165
      ---
       350
```

Der Quotient heißt 83,636... das ist 83 Gulden, und 0,636.. Gulden drüber. Die Bedeutung dieses Ueberschusses kennt jeder, der sich die Kreuzer und Pfennige, welche an Gulden angehängt werden, als Decimaltheile der ganzen Gulden vorzustellen weis, und einige Stunden darauf verwendet hat, die dabei gewöhnliche Ausdrücke sich einzuprägen. Schon oben in §. 133 ist angehenden Rechnern der Rath gegeben worden, sich eine kleine Tabelle zu verfertigen, in welcher die Brüche von $\frac{1}{60}$ bis $\frac{63}{60}$ in Decimalen ausgedrükt zu ersehen wären. Wer viel mit Geldrechnungen zu thun hat, wird dieselbe bald erweitern, und die Mühe nicht scheuen, die Ausdrücke für halbe Kreuzer und Pfennige der gedachten Tabelle noch einzuschalten. Hat er dieselbe vor sich liegen, so zeigt ihm (für den vorliegenden Fall) ein Blik, daß

0,6333

0,6333 . . . . 38 Kreuzer
0,6375 . . . . $38\frac{1}{4}$ Kreuzer

angeben; und er kann also sicher den Ausspruch thun: der Quotient 83,636.. beträgt 83 Gulden, 38 Kreuzer mit einem Ueberschuß, der nicht ganz 1 Pfenning beträgt, aber doch bis auf ein Tausendtheilchen daran hinreicht; so daß er allerdings wohl 83 G. $38\frac{1}{4}$ Kr. setzen dürfte, ohne der Genauigkeit etwas zu vergeben.

Wie viel sind $\frac{275}{2\,3}$ Gulden in Gulden und Kreuzern? heißt die Aufgabe S. 185. Die Division giebt 119,5652.. wofür sich 119 Gulden $33\frac{7}{8}$ Kreuzer annehmen läßt, weil nehmlich die gedachte Tabelle jedem sogleich

0,5625 = $33\frac{3}{4}$ Kreuzer
und 0,5666 = 34 Kreuzer

angiebt, und man daher durch einen leichten Schluß auf die dazwischen liegende Gröse ($33\frac{7}{8}$) geführt wird.

§. 144. Vorzügliche Vortheile gewährt überdem die Decimal-Methode in allen Interesse- oder Zins-Rechnungen; indem sie zu einer Kürze Anlaß giebt, welche sich auf keinem andern Weg denken läßt.

Man frage: Wie viel beträgt der Zins aus 235 Gulden, wenn dieses Capital nur auf 1 Procent ausstünde?

Vorgelegt ist: 235 Gulden
Und der Zins ist 2,35 G. = 2 fl. 21 Kr.

Es ist nehmlich blos eine Division durch die Zahl 100 nöthig, indem die der Rechnung zum Grund liegende Proportion:

Capit. Capit. Zins Zins
100 zu 235 = 1 : zu $\frac{235}{100}$

im lezten Glied nichts anders, als 2,35 (im Decimal-Ausdruk) ausgeben kann. Daß aber 0,35 oder $\frac{35}{100}$ so viel, als $\frac{7}{20}$ oder als $\frac{21}{60}$ betrage, weis jeder Decimal-Rechner, der auch nur wenige Kenntnisse besizt. Man sehe in §. 133 zurük.

Wie viel betragen die Zinse aus eben der Summe, wenn die Procente zu 2 vom 100 angenommen würden?

Vorgelegt ist: 235 Gulden
Divid. durch 100 2,35
Duplirt; giebt 4,70; d. i. 4 fl. 42 Kr.

Die Rechtfertigung dieses Verfahrens beruht wieder auf der Proportion:

100 : 235 = 2 : $\frac{470}{100}$.

Das lezte Glied ist so viel, als 4,70 oder 4,7 welche Zahl $4\frac{7}{10}$ oder $4\frac{42}{60}$ bedeutet.

Wenn 3 Procente angenommen würden, geht der Calkül gleichförmig von statten:

Vorgelegt ist: 235 Gulden
Divid. durch 100 2,35
Multipl. mit 3; giebt 7,05 d. i. 7 fl. 3 Kr.

Wenn

Wenn 4 Procent angenommen würden:

Vorgelegt 235
Divid. durch 100 2,35
Multipl. mit 4; giebt 9,40, d. i. 9 fl 24 Kr.

Wenn 5 Procent angenommen würden:

Vorgelegt 235
Divid. durch 100 2,35
Multipl. mit 5 11,75, d. i. 11 fl. 45 Kr.

Auf diese Weise lassen sich alle Procent-Rechnungen blos mit zwo Zeilen *) führen, jedoch

*) Die gewöhnlichste, und welche am allermeisten vorkommt, die zu 5 Procent, läßt sich sogar noch kürzer führen, als hier selbst angezeigt worden. Man darf nehmlich blos das vorgegebene Capital halbiren, und alle Ziffern dieser halben Summe um eine Stelle in den Dekaden (niederwärts) rücken; so ist der Calkül vollzogen: z. B.

Vorgelegt ist: 235 oder 235,0
Der Zins heißt: 11,75, d. i. 11 fl. 45 Kr.

Ein andres Beispiel: 464 Gulden, 36 Kr. sei das Capital; der Zins wird gesucht. Da muß man das Capital sich denken, als 464,6 Gulden, so ist die Rechnung: 23,23. od. 23 fl. 13 $\frac{7}{8}$ Kr. ist der Zins.

Wären etwa die höchsten Zifern des Capitals 10 oder 11, od. 12 ... 19, so muß man die Zifern, um die Zinsrechnung nach dieser Weise zu führen, allemal um 2 Stellen rücken, nicht blos um eine: z. B.

Capital: 1146,6
Zins: 57,33, d. i. 57 fl. 20 Kr.

Der Grund dieses Verfahrens liegt blos darinn, weil $\frac{1}{20}$tel des Capitals $= \frac{5}{100}$ ist, $\frac{1}{20}$ aber $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}$ beträgt.

jedoch voraus gesezt, daß die Zahl der Procente eine ganze Zahl sei. Ist diese aber ein Bruch, so sind meistens doch 3 Zeilen erforderlich. Z. B.

Wie viel betragen die Zinse von 235 Gulden, wenn der Zins nur zu $\frac{2}{3}$ Procent angenommen würde?

Vorgelegt ist 235
Multipl. mit 2 470
Divid. durch 100 4,70
Divid. durch 3 giebt 1,566.., d.i. 1 fl. 34 Kr.

weil nehmlich die Proportion statt hat:

$$100 : 235 = \frac{2}{3} : \frac{2 \cdot 235}{3 \cdot 100}.$$

Der geübte Rechner wird aber wahrscheinlich nicht einmal immer solche drei Zeilen aufs Papier niederschreiben. (Die vorgelegte Capital-Zahl wird hiebei für keine Zeile gerechnet, weil blos von dem Raum die Rede ist, welchen die Operation des Calküls selbst einnimmt).

Es sei eben die Zahl, als Capital, nochmals vorgelegt; die Procente aber seien zu $1\frac{1}{4}$ Procent bestimmt; wofür man $\frac{5}{4}$ sich denken muß. Da ist dann das Verfahren so:

Vorgelegt 235
Multipl. mit 5 1175
Divid. durch 100 11,75

und durch 4; giebt: 2,937.. d. i. 2 fl. $56\frac{1}{4}$ Kr.

Diese Zinsrechnungen werden um nichts weitläuftiger, wenn auch an der Capital-Summe sich Kreuzer oder ein Bruch angehängt befin-

finden. Z. B. wenn gefragt würde, wie viel geben 235 Gulden, 24 Kr. Zinse, wenn diese zu $1\frac{1}{4}$ Procent genommen werden? Da hat man nehmlich blos die 24 Kreuzer als = 0,4 zu denken, weil $\frac{2}{5}$ eines Guldens oder $\frac{4}{10}$ eben 24 Kreuzer ausmachen. Daher wird nun so gesezt:

Die vorgel. Summe 235,4
Multipl. mit 5 1177,0
Divid. durch 100 11,770
und durch 4; giebt 2,9425. d. i. 2 fl. $56\frac{5}{8}$ kr.

Die Bemühung, den Bruch, der an dem Capital hängt, in Decimalen sogleich auszudrücken, ist hiebei freilich nie zu umgehen; aber sie ist dem, der nur ein wenig in dieser Methode geübt ist, gewiß gar nicht lästig. Ohne Decimal: Rechnung ist es schlechterdings nicht möglich, eine Aufgabe von diesem Schlag so kurz und bündig aufzulösen.

§. 145. Endlich dient Decimal-Rechnung noch über alles dazu, Wurzeln aus Zahlgrösen aller Art auszuziehen. Wir wollen uns hier blos auf Quadrat-Wurzeln einschränken.

Wenn eine ganze Zahl z. B. 55225 vorgelegt wird, mit der Auflage, die Qu. Wurzel davon anzugeben, so verfährt man so:

5	5 2	25	235
4			
1 5 2			
(4 3)			
1 2 9			
2 3 2 5			
(4 6 5)			
2 3 2 5			
0			

Ister Act. Man theilt die gegebene Zahl in Classen; je zwei Zifern in eine, von der niedrigsten an gezählt.

IIter Act. Man sezt eine Quadrat-Zahl, deren Grösse an die Zahl der ersten Classe am nächsten hinreicht, unter diese, und subtrahirt (hier 4 von 5; Rest 1).

IIIter Act. Die Wurzel des gewählten Quadrats schreibt man in die gewöhnliche Stelle des Quotienten (hier 2 hinter den Strich).

IVter Act. Nachdem die Grösse der 2ten Classe neben den Rest herunter gesezt worden (52 neben 1); so duplirt man die Wurzel-Grösse, welche im Quotienten steht; und schreibt dieses Duplum unter die erste Zifer *) der 2ten Classe; (hier 4 unter 5).

V. Neben diese eingeschriebene Zahl sezt man eine der Zifern von 0 bis 9 zur rechten; und zwar diejenige, welche als Multiplicator in 43 ein Product giebt, welches zunächst an 152 liegt, und sich also noch abziehen läßt; (wie hier 129 von 152).

Wäre eine zu hohe Zifer von 0 bis 9 gewählt, so wird das zu hohe Product die Subtrac-

*) Wäre dieses Duplum eine Zahl gröser, als 9, so kommt nur die hintre Zifer, da wo jezt 4 steht, und die vordre würde weiter gegen die linke Hand gerükt.

traction unmöglich machen, wodurch dann jeder selbst auf die gehörige Zahl hingewiesen wird. Ist man dieser gewiß, so wird sie sogleich in den Quotienten eingeschrieben.

VI. Hierauf wird nach vorgenommener Subtraction neben den Rest (23), sogleich die Zahl der 3ten Classe herunter gesezt; (hier 25) und alsdenn das Verfahren gleichförmig von vorne angefangen, und fortgesezt; nehmlich die Zifern im Quotienten werden duplirt, das Duplum (hier 46) eingeschrieben, wieder eine Zifer von 0 bis 9 ausersehen, (hier 5) damit multiplicirt, und abgezogen. Mit dieser lezten Zifer ist in dem vorgelegten Fall die ganze Operation geendigt; sie wird in die Stelle des Quotienten neben 23 eingeschrieben; und weil die Subtraction des lezten Products (2325) gar keinen Rest läßt, so erhellet damit, daß 235 die vollkommene Quadratwurzel von 55225 sei.

Auch darf man nur 235 durch sich selbst multipliciren, um sich von der Richtigkeit der geführten Rechnung Probweise zu überzeugen.

Die Wurzel-Auszüge aus ganzen Zahlen gehen nun allemal auf diese Art von Statten.

Aber, wie? wenn eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruch vorgelegt würde, um die Quadratwurzel daraus anzugeben? Wenn z. B. gefragt würde, wie viel beträgt $\surd(552\frac{1}{4})$?

Da schreibe man für $552\frac{1}{4}$ nur sogleich im Decimal-Ausdruk 552,25; und verfahre hierauf ganz, wie bei der vorher vorgelegten ganzen

Zahl 55225. Natürlich aber muß in den Quotienten jezt 23,5 kommen, und nicht 235, in dem der Bruch 0,25 auch den Anhang von Zehntheilchen hinter 23 nothwendig macht. Die Wurzel wird demnach heissen $23\frac{1}{2}$; und also ist $\surd(552\frac{1}{4}) = 23\frac{1}{2}$.

Wenn weiter gefragt würde, wie gros ist wohl die Quadratwurzel aus $5\frac{209}{400}$? so wäre auch hier wieder zuvörderst der angehängte Bruch im Decimal-Ausdruk darzustellen. Er ist = 0,5225. Denn $\frac{209 \cdot 25}{400 \cdot 25}$ ist $\frac{5225}{10000}$ gleich; und dieser Bruch ist eben = 0,5225. Die Aufgabe geht also nun dahin: aus 5,5225 die Qu. Wurzel auszuziehen.

Man vergleiche diese Zahl 5,5225 mit der ganzen Zahl 55225; es sind eben die Ziffern, nur das Strichlein giebt den Werth in den Dekaden anders an. Die Ausziehung der Wurzel selbst muß aber eben so vor sich gehen, wie sie bei 55225 gezeigt worden ist. Blos im Quotienten ändern sich die Zehntheilchen natürlich jezt ebenfalls; Anstatt 235 erhält man nun 2,35; und daraus ergiebt sich dann, daß

$$2{,}35 \text{ oder } 2\tfrac{7}{20} = \surd(5\tfrac{209}{400})$$

oder die Qu. W. aus 5,5225 sei.

Hiemit ist man vorbereitet, noch einen Schritt weiter zu gehen: So, wie sich aus 5,5225 die Quadr. Wurzel ausziehen läßt, läßt sie sich auch aus 5,4756 ausziehen; und heißt da 2,34 oder $2\frac{17}{50}$.

Eben

Eben so findet man:

$\surd(5{,}33601) = 2{,}31$ oder $2\frac{31}{100}$

und $\surd(5{,}2900) = 2{,}30$ oder $2{,}3$ d. i. $2\frac{3}{10}$.

Man erwäge diesen lezten Saz. daß 5,2900 = 5,29 sei, weil die Nullen an Decimalen (nach der lezten Zifer) den Betrag einer Gröse nicht ändern (nach §. 123).

Damit wird man darauf hingeleitet, daß sich, auch wohl, wenn nach dem Strichlein blos Nullen stünden, durch gleichförmiges Verfahren, eine Quadratwurzel ausziehen lassen dürfte. Auch ist allerdings

$\surd(5{,}0000) = 2{,}23..$

und $\surd(5{,}000000) = 2{,}236....$

und man bemerkt damit bald, daß man durch fort und fort angehängte Nullen immer auf kleinere Theilchen im Quotienten gelangen könne, weil nehmlich allemal zwei weiter angehängte Nullen eine neue Classe erzeugen, und damit die Fortsetzung des Auszug-Geschäfts bis ins Unendliche möglich machen.

Durch diesen sehr natürlichen Kunstgriff wird man zu der Einsicht geführt: wie sich aus allen Grösen, welche keine reine Quadr. Wurzeln haben, (deren in §. 114 Erwähnung geschehen), dennoch die Qu. Wurzeln näherungsweise ausziehen lassen. Das Verfahren ist und bleibt ebendasselbe, wie das im Anfang dieses §phen gewiesene (mit und bei ganzen Zahlen). Folgendes Beispiel mag aber doch zur Erläuterung noch hier beigefügt stehen: $\surd 5$ ist $= 2{,}236...$ Denn man setze und rechne nur so:

```
5,|0 0|  0 0|  0 0| 2,236..
4
-----
1 0 0
 (4 2)
  8 4
-----
  1 6   0 0
    (4  4 3)
    1 3 2 9
-----------
      2 7 1
        (4 4
          2 6 7
-------------
              3
```

```
|0 0|
|6 6)
|9 6
-----
|0 4..
```

Angehende Rechner müssen selbst Hand anlegen, und sich in diesem Geschäft üben. So werden sie, wenn sie nach den vorgelegten Mustern verfahren, die Wurzeln aller Grösen von 1 bis 100, (es mögen denselben Brüche anhängen oder nicht) leicht ausziehen lernen. Die Wichtigkeit der in §. 123 und 134 gelehrten Umbildungen wird ihnen dabei ohne Zweifel sehr einleuchtend werden.

Die Gründe des von S. 420 an gezeigten Mechanismus einzusehen, muß man allemal die ausgeworfene Wurzel sich in Theilen, und zwar jeden Theil allgemein, als a + b, denken. Z. B. in S. 420 (aus 235) zuerst 23 als 20 + 3; hierauf das Qu. von a + b nehmen, und unter einander hinsetzen:

$(a + b)^2$ ist $= aa + 2.ab + bb$

$(20 + 3)^2$ ist $= 400 + 120 + 9.$

Diese

Diese Grösen lassen sich in dem berechneten Exempel bald heraus finden, und so wird einleuchtend, wie die Quadrate der Wurzeltheile in der geführten Rechnung selbst (implicite) begriffen seien.

Alphabetisches Register.

A.

Abacus, von Pythagoras angegeben; eine Form desselben. S. 46.
Abkürzungen in Rechnungssätzen, müssen nicht allzu frühe gesucht werden. S. 161. 272. 410.
Addiren, mit ganzen Zahlen. S. 14.
. . . mit Brüchen. S. 91...95.
. . . verschiedener Brüche mit Decimalen. S. 380...384.
Aequal-Zeichen, deren Darstellung und Erklärung. S. 28 vergl. mit S. 38 und S. 141.
Allgemeine Zeichen (Signaturen mit Buchstaben) derenAufführung und Bedeutung S. 28. 40. 57. 62.
Allgemein und noch allgemeiner, Beziehungsweise in Formeln genommen. S. 343.
Arithmetische Proportionen; Davon S. 113. 114. 299...305.
. . . . Progressionen, deren Natur nebst Formeln für sie. S. 308.
. . . . Mittelproportionale; Davon S. 304...306.
Aufgabe (Problem) eines Satzes. S. 41.
. . . eine, läßt sich oft in zwei zerlegen; Nothwendigkeit dieser Zerlegung S. 208. 211. 220. 240.

B.

Behalten, und stillschweigend Uebertragen; eine nöthige Kunst. S. 19 vergl. mit S. 21 und 44.

Beispiele; über deren Vortrag in Rechenbüchern. S. 160. 174.
. . . . unnatürlich-ausfallende können dennoch lehrreich seyn. S. 320.
Biquadrat; Bedeutung und Bezeichnung. S. 345.
Brüche, Zahlenbrüche; Erklärung S. 75.
. . . unächte; von ihnen insbesondre S. 79...85.
. . . ächte, oder wahre; von ihnen. S. 76. 80.
. . .. doppelte; von ihnen S. 131. von deren Nutzen im Beweis der Decimal-Methode. S. 367. 371.
. . . aller Art führen auf geom. Proportionen. S. 126.
Buchstaben-Formeln; dafür soll man sich nicht fürchten. S. 28. 57.
. . . . . Ihr Gebrauch ist sehr dienlich. S. 217. 272. 348.

C.

Columnen (Säulen) im Kettensaz nach Reesischer Manier; davon S. 230. 244. 253.
. . . . in wie ferne sie allemal nur ganze Zahlen enthalten könnten. S. 248.
Concrete; in Concreto, gegen allgemeine Sätze genommen. S. 63. 333. 343.
Cubus, Cubik-Grösse; Bedeutung und Bezeichnung. S. 342.

D.

Decimalen; darauf wird vorläufig aufmerksam gemacht. S. 185. 270. 337. vergl. mit S. VIII der Vorrede.
. . . . die Lehre selbst dieser Rechnungsmethode. S. 351.
Dekaden, Zählung nach Dekaden; Erklärung. S. 6.
Differenz; Bedeutung. S. 35. 36.
. . . . einer arithmetischen Progression; Kunst sie zu entdecken, wenn sie versteckt liegt. S. 312.
Dividiren; Division mit ganzen Zahlen. S. 58.
. . . . . mit Brüchen. S. 105... 108.

Dividiren; Division mit Decimalen. S. 395...402.
Dignität einer Gröse, Bedeutung. S. 328.

E.

Einheit, zusammengesezt, in wie ferne? S. 27. S. 75.
Einmal-eins; das gewöhnliche. S. 46.
. . . . das grössere; wird empfohlen. S. 83. 89.
Eins ist $= \frac{a}{a}$, und auch $= \frac{b}{b}$; wie das zu nehmen sei? S. 126. 144 vergl. mit. S. 77.
Elle, Heilbronnische, deren Verhältnis gegen Schuh. S. 205...207.
Exponent, was er sei? S. 112.
. . . . kann auch ein Bruch jeder Art seyn. S. 121.
. . . . dessen allgemeine Darstellung führt sehr natürlich auf grose Vortheile. S. 329.

F.

Factoren, Bedeutung. S. 45.
. . . wie das Daseyn von zwei und mehrern angedeutet werde. S. 54 vergl. mit S. 307.
. . . können versezt werden, ohne daß ihre Stellung die Geltung des Products änderte. S. 54. 265.
. . . Tafeln, oder Tabellen, um sie leicht zu finden; sind zu Divisionen und Reductionen sehr nüzlich. S. 89. 90.
Formel (allgemeine) für jeden Bruch. S. 126.
. . . für die natürliche Zahlen: 1, 2, 3...; mit Anzeige, wie diese darunter passen. S. 307.
. . . ihre Vortheile, sehr viel in Kürze auszusprechen, und Gesezlichkeiten bestimmt anzugeben. S. 311.
Frankfurter Wechsel-Geld; Rechnungen darüber, S. 181...189. auch S. 292...294.
Frucht-Rechnungen kommen vor S. 24. 269. 270.

G.

G.

Ganze, Zahlen, kann man allemal zu Brüchen umbilden. S. 107.
Ganzes (ein) auszumachen, was wesentlich dazu gehöre. S. 27.
Geld, im Reich, in den vordern R. Kreisen; davon S. 23. 160.. 179.
. . . Sächsisches; davon S. 177. 178.
. . . Frankfurter im Wechsel. S. 181.
Gewichte; Vergleichung mehrerer. S. 189.
Gleichartigkeit, was darunter zu verstehen sei. S. 17.
. . . . . Empfehlung, vor allem darauf zu achten. S. 27. vergl. mit S. 158.
Gleichung, was man sich dabei vorzustellen habe. S. 28 vergl. mit S. 38 und S. 141.
Guldenfuß, der 24 G. F. mit dem 20 G. Fuß verglichen; S. 177.

H.

Halbiren, geht Division an. S. 63.
. . . . bei Reductionen. S. 265.
Horizontale Stellung. S. 47.
. . . . . etlicher Glieder in Proportionen, und deren Umbildung in eine senkrechte Stellung, macht allein Reesens Kunst aus. S. 230.

J.

Incommensurable } Grösen, was sie seien S. 338.
Irrational= }
. . . . . deren Behandlung um Umbildung. S. 339.
. . . . . deren Ausdruk mit Decimalen.

S.

Interesse oder Zins=Rechnungen kommen vor S. 225. 251. 261.
. . . . . sind am leichtesten mit Decimalen zu führen. S.

K.

Klammer, Zusammenwerfung in eine Kl. Vortheile

theile davon, auf welche sehr zu achten. S. 55. 322. 323.
Kreuzer, als Brüche von Gulden, ausgedrükt. S. 170. 171.
. . . . in Decimalen ausgedrükt. S. 387. 388. 415. 416.

M.

Maas (Längenmaas) verschiedener Städte verglichen. S. 200...205.
. . . Ellen- und Fußmaas zu Heilbronn verglichen. S. 206. 207.
Mechanische Regeln muß man rechtfertigen. S. 127. 130. 376. 377.
Million (eine) Gehalt und Bezeichnung. S. 11. 13.
Minuend; Bedeutung des Worts. S. 30. (Dabei ein Drukfehler, indem vereiniget, anstatt verringert steht.
Minus; Zeichen und Bedeutung. S. 37.
Mittel-Proportionale, arithmetische, wie sie zu finden sei? S. 303.
. . . . . geometrische. S. 334.
. . . . . die leztere, in Näherung anzugeben, wenn sie rein nicht existirt. S. 332... 337.
Multipliciren, mit ganzen Zahlen. S. 44.
. . . mit gewöhnlichen Brüchen. S. 99. 100.
. . . mit Decimal-Brüchen. S. 395...412.

N.

Näherungen einer Gröse, die man sucht; Befriedigung damit in sehr vielen Fällen. S. 185. 188. 284.
. . . . bei Wurzel-Auszügen. S. 331. 332. 336.
. . . . sind mit Decimalen, so weit man nur will zu treiben. S. 377. 378.
Nenner eines Bruchs ist als Divisor anzusehen. S. 79.
Nenner wird in Decimal-Rechnung allemal weggelassen. S. 352...354.
Null (Zero) S. 6.

Null ſteht in Decimalen vornen; Aergernis darüber iſt eingebildet. S. 355.
Nullmal-nehmen, Bedeutung. S. 53. 55.

P.

Plus, Ausdruk bei Additionen, und Bezeichnung. S. 27. 28.
Potenz (erhöhter Zahlen) Bedeutung, und Bezeichnung. S. 328. 345.
Primzahlen; Erklärung. S. 83. vergl. mit S. 291.
Proben über Additionen. Davon S. 21.
. . . über Subtractionen ... S. 37. 39.
. . . über Multiplicationen. S. 70. 72.
Procente, wie ſie berechnet werden. S. 277. 288; auch S. 294. 297.
Proportion. Erklärung des Worts. S. 111.
. . . . von arithmetiſchen Prop. S. 113.
. . . . von geometriſchen Prop. S. 110.
. . . . von ſtetigen geom. Prop. S. 328. 329.
Progreſſionen; von arithmetiſchen. S. 308...326.
. . . . . von geometriſchen. S. 341...349.
Punkt (ein) zwiſchen zwo Gröſen deutet Multiplication an. S. 54.
. . . Wann er wegbleiben könne? S. 307.
. . . Aus Punkten ein Rechtek gebildet, correſpondirt dem Betrag eines Products, in wieferne? S. 47.

Q.

Quadrat, mit der Wurzel-Gröſe verglichen. S. 328...330.
Quadrat-Wurzel, deren allgemeines Zeichen. S. 330.
. . . . . iſt allemal eine geom. Mittel-Proportionale. S. 339.
. . . . . Wann ſie blos in Näherung zu erhalten ſei? S. 331. 333.
Quadrat-Wurzel, wie ſie ausgezogen werde? S. 420..424.
Quinque (Regel de) was darauf führt. S. 217. 218.

Quin-

Quinque, welche an sich sehr verschiedene Aufgaben doch auf sie zu reduciren seien? S. 233..235.
. . . die verkehrte; wann sie anzuwenden sei. S. 239.
. . . von zwei gleich statthaften Auflösungs-Wegen dabei; vom Isten S. 240 bis 254
vom IIten S. 255 bis 264.
Quotient in Division. S. 59.
. . . wann er vollendet, und nicht vollendet sei. S. 80.
. . . kann allemal als Glied einer Proportion gedacht werden. S. 117.
. . . und als Exponent. S. 112. 135.

R.

Ration (Verhältnis) S. 112.
Rational, gegen Irrational gehalten. S. 338.
Reduciren; Erklärung des Ausdruks. S. 85. 86.
Reduction unter einen Nenner. S. 92...96.
. . . . verschiedener Geldsorten. S. 175. 235. 290.
. . . . verschiedener Gewichte. S. 186.
Regel de Tri; Beweis des Verfahrens dabei. S. 140.
. . . . derselbe Beweis blos in algebraischen Ausdrücken. S. 142.
. . . . Sätze; deren Aufstellung nach alter Weise ist unschiklich. S. 153. 154.
. . . . deren Verfechtung wird widerlegt. S. 157...159.
Regel de Quinque; siehe Quinque.
Reihen, so viel, als Progressionen. S. 308. 343.
. . . von Brüchen. S. 326. 351.
Rees (von) Etwas über ihn. S. 229.
. . . . Seine Methode, Kettensätze zu stellen, und deren Gründe. S. 228...230.
Rest (Residuum) bei Subtractionen. S. 30. 35.
. . bei Divisionen. S. 59. 62.

S.

Species der Rechenkunst, ob fünf anzunehmen seien? S. 9.

Sprache, deren Wendungen ſollen den Rechner nicht verführen. S. 159. 199.
Stetig; Bedeutung des Ausdruks. S. 327.
. . . bei arithmetiſchen Prop. und Progreſſionen. S. 299...306.
. . . bei geom. . . . . S. 340.
Strichlein, beim Numeriren, veranlaſſen Misverſtand. S. 13.
. . . . deren weſentliche Einzeichnung, um Ganze und Brüche abzuſondern, bei Decimalen. S. 352 bis 354.
Subtrahiren, mit ganzen Zahlen. S. 29.
. . . . . mit Brüchen. S. 96...98. 104.
Summe einer arithmetiſchen Progreſſion, wie ſie am kürzeſten gefunden werde. S. 316. 317.
. . . einer geometr. . . . S. 348.

T.

Tabellen; deren Nuzen. S. 83. 88.
Tüpfelchen; was ſie bei Decimalen bedeuten. S. 376.

U.

Uhr-Glocken-Schläge; deren Zählung S. 321.
Umbildung zuſammengeſezter Grösen; deren Wichtigkeit S. 55. 56. 79. 94. S. 322 (vorzüglich).
. . . . einiger allgemeiner Formeln, wie ſie zugehe. S. 313. 314. auch S. 323. 324.
Umkehrung zweier Verhältnis-Grösen, wann ſie nothwendig ſei. S. 190. 193.
. . . bei der Regel de Quinque (converſa) S. 240..264.
Unächte Brüche, was ſie ſeien? S. 79.
Unendlich, welche Brüche ſo genannt werden können. S. 373.
. . . . die Anſtösigkeit dieſes Beiworts iſt eingebildet. S. 378.
Unbekannte Grösen werden mit den gegebenen (bekannten) bei allen Problemen verglichen. S. 28. 40.
. . . . zwei dergleichen, von welchen die eine nur beim erſten Anſchein verſtekt liegt. S. 323.
Urſache und Wirkung geben zwei weſentliche Verhältniſſe in zuſammengeſezten Proportionen ab. S. 231. 232.

V.

Verhältnis zweier Grösen; Erklärung u. Bezeichnung. S. 109. 110.
. . . . iſt ſehr oft verſtekt-vorhanden. S. 115. 116.

Ver

Verhältnis (verkehrtes) Erklärung. S. 190. 191.
(S. auch Umkehrung)
Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimal-Brüche, nebst den Gründen des Verfahrens dabei. S. 376. 377.
(S. auch Umbildung.)
Verwechslung der Glieder, in geometr. Proportionen gestattet, wann? und wo? S. 147
Vertical, (direct über einander) stehen Zahlen, und sind ins Auge zu fassen. S. 226. 229. 230.
. . . vorzüglich ist auf diese Lage zu achten, in Fällen wie S. 265. 359.

W.

Wein-Rechnung. S. 279.
Wechsel-Geschäfte; Rechnungen, welche dabei vorkommen. S. 235. 283. 293.
Werth (innrer) bei Brüchen nimmt ab, wenn der Nenner zunimmt. S. 76.
. . . ändert sich gar nicht immer mit der äussern Gestalt und Umbildung eines Bruchs. S. 87.
Wollen-Rechnung (eine) in einem zusammengesezten Fall. S. 294.
Würtemberg; Längenmaas mit Pariser verglichen. S. 204.
mit Heilbronnischem. S. 205.
. . . . . Eichmaas. S. 279.
Wurzel-Zeichen; Anzeige und Erklärung. S. 330.
. . . . . vor Brüchen stehend, afficirt Zähler und Nenner. S. 338.
. . . . . Wann, den Zähler allein? Ebendas.

Z.

Zahl, von Ziser unterschieden. S. 6.
Zählen, wie die Kunst Kindern beizubringen sei. S. 1...5.
Zeichen (allgemeine) der Addition. S. 27.
. . . . . der Subtraction. S. 37.
. . . . . der Multiplication. S. 54.
. . . . . der Division. S. 74.
. . . . . der Wurzeln. S. 330.
. . . . . der Potenzen. S. 342...345.
Zeit, ein wesentlicher Theil bei einer gewissen Gattung zusammengesezter Proportionen. S. 233.
Zerlegung jedes Dividenden in Factoren. S. 66.
. . . . Nutzen dieser Vorstelluna. S. 70. 71.
. . . . jedes Zahlen-Bruchs in Factoren. S. 77. 121.
Zerfällen in Factoren ist oft sehr nöthig, in Fällen wie S. 79...82. Auch S. 140. 152. 265.
. . . . geht nicht an, bei Primzahlen. S. 84. 291.
Zero, Zeichen und Bedeutung. S. 6.

Errata.

Vorrede:

S. IX. Zeile 5. Anstatt wird lies werden.

S. XV. Zeile 1. der Note. Anstatt die Bemerk. lies die vorzüglichern Bemerk.

Im Buche selbst:

S. 30. Zeile 4. Anstatt vereiniget lies verringert.

S. 35. Zeile 18. Anstatt §. 13. S. 27. lies §. 14. S. 30.

S. 92. Zeile 2. in der Note. Anstatt §. 11. lies §. 12.

S. 262. Zeile 5. Anstatt S. 254 lies S. 255.

S. 281. Zeile 5. Anstatt $77\frac{1}{2}$ lies $77\frac{2}{3}$.

[Ueber die S. 187 angegebene Gewicht-Verhältnisse zwischen Frankf. und Stuttgart läßt sich auch einiges erinnern, wenn gleich diese Angaben aus Würtembergischen Schriften selbst entlehnt sind.]

Bayerische Staatsbibliothek München

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schübler, Christian Ludwig, / Gigas, Johann Michael, / Class, Johann Daniel,

Ueberzeugende Gründe der Rechenkunst insbesondere der Reesischen Methode und der Decimal-Rechnung

Heilbronn am Neckar u. Rothenburg ob der Tauber 1795

BHS II K 27
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708115-0
VD18 1523147